ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2016

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (2.5 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3+u_n}{5-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 - Vérifions que : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis montrons par récurrence que $u_n < 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$. 0.75 pt

• **Vérifions que : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - 3 &= \frac{3+U_n}{5-U_n} - 3 \\ &= \frac{3+U_n-3(5-U_n)}{5-U_n} \\ &= \frac{3+U_n-15+3U_n}{2+3-U_n} \\ &= \frac{4U_n-12}{2+(3-U_n)} \\ &= \frac{4(U_n-3)}{2+(3-U_n)} \end{aligned}$$

Donc : $U_{n+1} - 3 = \dfrac{4(U_n-3)}{2+(3-U_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

• **Montrons par récurrence que $U_n < 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$.**
⋆ Pour $n = 0$ on a : $U_0 = 2 < 3$ (proposition vraie).
⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n < 3$ et montrons que $U_{n+1} < 3$.
Puisque $U_n < 3$ alors, $U_n - 3 < 0$, $3 - U_n > 0$ et $2 + (3 - U_n) > 0$
Donc, $U_{n+1} - 3 = \dfrac{4(U_n-3)}{2+(3-U_n)} < 0$
D'ou, $U_{n+1} < 3$
Par conséquence d'apres le raisonnement par récurrence $U_n < 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 - a) **Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ puis déduisons que $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.** 0.75 pt

• **Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, On a :

$$\begin{aligned}
\frac{V_{n+1}}{V_n} &= \frac{\frac{U_{n+1}-1}{3-U_{n+1}}}{\frac{U_n-1}{3-U_n}} \\
&= \frac{\frac{3+U_n}{5-U_n}-1}{3-\frac{3+U_n}{5-U_n}} \times \frac{3-U_n}{U_n-1} \\
&= \frac{\frac{3+U_n-5+U_n}{5-U_n}}{\frac{15-3U_n-3-U_n}{5-U_n}} \times \frac{3-U_n}{U_n-1} \\
&= \frac{2U_n-2}{-4U_n+12} \times \frac{3-U_n}{U_n-1} \\
&= \frac{2\left(U_n-1\right)}{4\left(3-U_n\right)} \times \frac{3-U_n}{U_n-1} \\
&= \frac{2}{4} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Alors, $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Donc, $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Par conséquence (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et du premier terme $V_0 = \frac{U_0-1}{3-U_0} = 1$.

• **Déduisons que $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, On a :

$$\begin{aligned}
V_n &= V_p \times q^{n-p} \\
&= V_0 \times q^{n-0} \\
&= 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Donc, $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b) **Montrons que $U_n = \frac{1+3V_n}{1+V_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis exprimons (U_n) en fonction de n.** 0.5 pt

• **Montrons que $U_n = \frac{1+3V_n}{1+V_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, On a :

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{U_n - 1}{3 - U_n} \\ &\Rightarrow V_n(3 - U_n) = U_n - 1 \\ &\Rightarrow 3V_n - V_n U_n - U_n = -1 \\ &\Rightarrow -U_n(V_n + 1) = -1 - 3V_n \\ &\Rightarrow U_n(1 + V_n) = 1 + 3V_n \\ &\Rightarrow U_n = \frac{1 + 3V_n}{1 + V_n} \end{aligned}$$

Donc, $U_n = \dfrac{1 + 3V_n}{1 + V_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- **Exprimons (U_n) en fonction de n.**

Soit $n \in \mathbb{N}$

Puisque $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ alors, $U_n = \dfrac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

Donc, $U_n = \dfrac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **c) Déterminons la limite de la suite (u_n).**

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1$

Car : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Exercice 2 : (2.5 pts)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(2,1,3)$, $B(3,1,1)$ et $C(2,2,1)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$$

0.5 pt **1 - a) Montrons que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.**

On a : $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

alors, $\overrightarrow{AB}\,(3-2, 1-1, 1-3)$

Donc, $\overrightarrow{AB}\,(1, 0, -2)$

et On a : $\overrightarrow{AC}\,(x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$

alors, $\overrightarrow{AC}\,(2-2, 2-1, 1-3)$

Donc, $\overrightarrow{AC}\,(0, 1, -2)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (0 \times (-2) - (-2) \times 1)\vec{i} - (1 \times (-2) - (-2) \times 0)\vec{j} + (1 \times 1 - 0 \times 0)\vec{k} \\ &= 2\vec{i} - (-2)\vec{j} + \vec{k} \\ &= 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

Donc, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

0.5 pt **b) déduisons que $2x + y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).**

On a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ et un vecteur normale au plan (ABC).

Alors, l'équation cartésienne du plan (ABC) s'écrite sous la forme : $2x + 2y + z + d = 0$.

Déterminons la valeur de d.

On a :

$$\begin{aligned} A(2,1,3) \in (ABC) &\Rightarrow 2x_A + 2y_A + z_A + d = 0 \\ &\Rightarrow 2 \times 2 + 2 \times 1 + 3 + d = 0 \\ &\Rightarrow 9 + d = 0 \\ &\Rightarrow d = -9 \end{aligned}$$

Donc, $2x + y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2 - a) Montrons que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,-1,0)$ et son rayon est 6.

0.5 pt

On a l'équation :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 34 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 + y^2 + 2y + 1^2 - 1^2 + z^2 - 34 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 - 2 - 34 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 36 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 6^2 \end{aligned}$$

Donc, le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,-1,0)$ et son rayon est 6.

b) Montrons que $d(\Omega,(ABC)) = 3$ et déduisons que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).

0.5 pt

• **Montrons que $d(\Omega,(ABC)) = 3$.**

On a :

$$\begin{aligned} d(\Omega,(ABC)) &= \frac{|\, 2x_\Omega + 2y_\Omega + z_\Omega - 9 \,|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \\ &= \frac{|\, 2 \times 1 + 2 \times (-1) + 0 - 9 \,|}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{9}{3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Donc, $d(\Omega,(ABC)) = 3$

• **Déduisons que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).**

Puisque $d(\Omega,(ABC)) = 3 < 6$ alors, le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).

Donc, le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).

3 - a) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC).

0.5 pt

On a : $(\Delta) \perp (ABC)$. Alors, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

Or $\Omega \in (\Delta)$ alors, la représentation paramétrique de la droite (Δ) est : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} /(t \in \mathbb{R})$

Donc, la représentation paramétrique de la droite (Δ) est : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} /(t \in \mathbb{R})$

0.5 pt

b) Montrons que le centre du cercle (Γ) est le point B.

On a le centre du cercle (Γ) est la solution du système : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+2t \quad /(t \in \mathbb{R}) \\ z = t \\ 2x+2y+z-9=0 \end{cases}$

il suffit de vérifier que : $B \in (\Delta)$ et $B \in (ABC)$.
On a : $B \in (ABC)$. Montrons que $B \in (\Delta)$.
On pose : $x_B = 1+2t_1$; $y_B = -1+2t_2$ et $z_B = t_3$
On a : $t_1 = \dfrac{x_B-1}{2} = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $t_2 = \dfrac{y_B+1}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$ et $t_3 = 1$.
Alors, $t_1 = t_2 = t_3$
Donc, $B \in (\Delta)$
Par conséquente $B \in (\Delta) \cap (ABC)$.
Donc, le centre du cercle (Γ) est le point B.

Exercice 3 : (2.5 pts)

0.75 pt

1 - Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ L'équation :$z^2 - 4z + 29 = 0$
On a : $a = 1$; $b = -4$ et $c = 29$
Alors,

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-4)^2 - 4 \times 1 \times 29 \\ &= 16 - 116 \\ &= -100 < 0 \end{aligned}$$

Puisque le discriminant $\Delta < 0$ alors, l'équation admet deux solutions complexes :

$$Z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - i\sqrt{-(-100)}}{2 \times 1} = \frac{4 - i\sqrt{100}}{2} = \frac{4-10i}{2} = 2 - 5i$$

$$Z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + i\sqrt{-(-100)}}{2 \times 1} = \frac{4 + i\sqrt{100}}{2} = \frac{4+10i}{2} = 2 + 5i$$

Donc, $S_{\mathbb{C}} = \{2-5i; 2+5i\}$

2 - Considérons, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les points Ω, A et B d'affixes respectives : $\omega = 9+i$, $a = 5+2i$ et $b = 5+8i$

a) Soit u le nombre complexe tel que : $u = b - \omega$.Vérifions que $u = 3+3i$ puis montrons que $\arg u \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

0.75 pt

• **Vérifions que $u = 3+3i$.**
On a :

$$\begin{aligned} u &= b - \omega \\ &= 5+8i-(2+5i) \\ &= 5+8i-2-5i \\ &= 5-2+8i-5i \\ &= 3+3i \end{aligned}$$

Donc, $u = 3+3i$.

• **Montrons que** $\arg u \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.
On a : $|\ u\ | = |\ 3+3i\ | = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Alors,

$$\begin{aligned} u &= 3+3i \\ &= 3\sqrt{2}\left(\frac{3}{3\sqrt{2}}+\frac{3}{3\sqrt{2}}i\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Donc, $\arg u \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) Déterminons un argument du nombre complexe $\overline{u}$ ($\overline{u}$ étant le conjugué de u). **0.25 pt**

On a : $\arg \overline{u} = -\arg u = \frac{\pi}{4}$

c) Vérifions que $a-\omega = \overline{u}$ puis déduisons que : $\Omega A = \Omega B$ et $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. **0.75 pt**

- **Vérifions que $a-\omega = \overline{u}$**

On a :

$$\begin{aligned} a-\omega &= 5+2i-(2+5i) \\ &= 5+2i-2-5i \\ &= 5-2+2i-5i \\ &= 3-3i \\ &= \overline{u} \end{aligned}$$

Donc, $a-\omega = \overline{u}$.

- **Déduisons que : $\Omega A = \Omega B$ et $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$**

On a : $u = b-\omega$ alors, $\mid u \mid = \mid b-\omega \mid = B\Omega$.
on a : $\overline{u} = a-\omega$ alors, $\mid \overline{u} \mid = \mid a-\omega \mid = A\Omega$.
Puisque $\mid u \mid = \mid \overline{u} \mid$ alors, $A\Omega = B\Omega$.
Donc, $A\Omega = B\Omega$.

$\star$ On a :

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) &= \arg(b-\omega) - \arg(a-\omega)\,[2\pi] \\ &= \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4})[2\pi] \\ &= \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}[2\pi] \\ &= \frac{2\pi}{4}[2\pi] \\ &= \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{aligned}$$

Donc, $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

d) On considère la rotation R de centre Ω et d'angle 2π. Déterminons l'image du point A par la rotation R. **0.5 pt**

On a : $\mid \frac{b-\omega}{a-\omega} \mid = 1$ et $\arg\left(\frac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Alors, la forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{b-\omega}{a-\omega}$ s'écrite sous la forme :

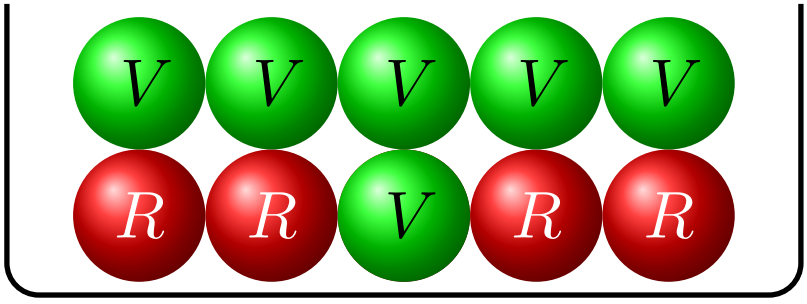
$$\begin{aligned}\frac{b-\omega}{a-\omega} &= \left|\frac{b-\omega}{a-\omega}\right|\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\\ &= 1\times i\\ &= i\end{aligned}$$

Donc, $b-\omega = i(a-\omega) = e^{i\frac{\pi}{2}}(a-\omega)$

Donc, l'image du point A par la rotation R est le point B.

Exercice 4 : (2.5 pts)

Une urne contient 10 boules : quatre boules rouges et six boules vertes. (les boules sont indiscernables au toucher).



On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne. Donc, On va utiliser les combinaisons C_n^p.

1 - **Soit A l'évènement :≪ les deux boules tirées sont rouges ≫. Montrons que $p(A)=\frac{2}{15}$.** **1 pt**

On a : $p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Or, $Card(A)=C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=\frac{4\times 3\times 2!}{2\times 2!}=\frac{12}{2}=6$

et $Card(\Omega)=C_{10}^2=\frac{10!}{2!(10-2)!}=\frac{10\times 9\times 8!}{2\times 8!}=\frac{10\times 9}{2}=45$

Alors, $p(A)=\frac{Card(A)}{Card(\Omega)}=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$.

Donc, $p(A)=\frac{2}{15}$.

2 - **Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne.**

3 - a) **Montrons que l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est $\{2,3,4\}$.** **0.5 pt**

- Si je tire 2 boules verts, les boules rouges restes sont 4.
- Si je tire un boule vert et un boule rouge, les boules rouges restes sont 3.
- Si je tire 2 boules rouges, les boules rouges restes sont 2.

Donc, l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est $\{2,3,4\}$

1.5 pt

b) Montrons que $p(X=3)=\frac{8}{15}$ puis déterminons la loi de probabilité de X.

- **Montrons que : $p(X=3)=\frac{8}{15}$**

On a : $p(X=3)=\frac{Card(X=3)}{Card(\Omega)}=\frac{C_4^1\times C_6^1}{45}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$.

Donc, $p(X=3)=\frac{8}{15}$.

- **Déterminons la loi de probabilité de X.**

On a : $p(X=2)=p(A)=\frac{2}{15}$.

Et $p(X=3)=\frac{8}{15}$.

Et $p(X=4)=\frac{Card(X=4)}{Card(\Omega)}=\frac{C_6^2}{45}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$.

X=x_i	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{3}$

$P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=\frac{2}{15}+\frac{8}{15}+\frac{1}{3}=1$

Problème : (8 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x-2+e^{2x}-4e^x.$$

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : $1cm$).

Partie I

0.25 pt

1 - a) Montrons que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-2+e^{2x}-4e^x=-\infty$

Car, $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-2=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} -4e^x=0\end{cases}$

Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

0.5 pt

b) Montrons que la droite (D) d'équation $y=2x-2$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x)-(2x-2)&=\lim_{x\to-\infty} 2x-2+e^{2x}-4e^x-(2x-2)\\&=\lim_{x\to-\infty} e^{2x}-4e^x\\&=0\end{aligned}$$

Car, $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} -4e^x=0\end{cases}$

Donc, la droite (D) d'équation $y=2x-2$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

0.5 pt

2 - a) Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} 2x-2+e^{2x}-4e^x \\ &= \lim_{x\to+\infty} 2x-2+e^x\left(e^x-4\right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Car, $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x-4=+\infty\end{cases}$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ puis interprétons géométriquement le résultat. **0.5 pt**

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2+e^{2x}-4e^x}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2+e^x\left(e^x-4\right)}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{x}+\frac{e^x}{x}\left(e^x-4\right) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Car, $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{x}=2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x-4=+\infty\end{cases}$

Donc, $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

• interprétons géométriquement du résultat.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ alors, la courbe (C_f) admet une branche parabolique de la direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3 - a) Montrons que $f'(x)=2(e^x-1)^2$ pour tout x de $\mathbb{R}$. **0.5 pt**

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$,

On a :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(2x-2+e^{2x}-4e^x\right)' \\ &= (2x-2)'+\left(e^{2x}\right)'-\left(4e^x\right)' \\ &= 2+2e^{2x}-4e^x \\ &= 2\left(e^{2x}-2e^x+1\right) \\ &= 2\left(e^x-1\right)^2\end{aligned}$$

Donc, $f'(x)=2(e^x-1)^2$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) Dressons le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. **0.25 pt**

On a : $f'(x)\geqslant 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Et

$$\begin{aligned}f'(x)=0 &\Leftrightarrow 2\left(e^x-1\right)^2=0 \\ &\Leftrightarrow e^x-1=0 \\ &\Leftrightarrow e^x=1 \\ &\Leftrightarrow x=0\end{aligned}$$

Alors, le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

c) Montrons qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]1, \ln 4[$ tel que : $f(\alpha) = 0$. **0.75 pt**

On a : la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en particulier sur l'intervalle $[1; \ln 4]$.

et on a : $\begin{cases} f(1) = e^2 - 4e = e(e-4) \approx -3.51 < 0 \\ f(\ln 4) = 2\ln 4 - 2 = 2(\ln 4 - 1) \approx 0.77 > 0 \end{cases}$

Alors, $f(1) \times f(\ln 4) < 0$.

Donc, d'apres le théorème des valeurs intermédiaire il existe un unique réel α de l'intervalle $]1, \ln 4[$ tel que : $f(\alpha) = 0$.

4 - a) Montrons que la courbe (C_f) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ et qu'elle est en-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty, \ln 4[$. **0.5 pt**

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{aligned} f(x) - (2x-2) &= 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x - (2x-2) \\ &= e^{2x} - 4e^x \\ &= e^x\,(e^x - 4) \end{aligned}$$

Puisque $e^x > 0$ alors, le signe de $f(x) - (2x-2)$ est le signe de $e^x - 4$.

On a : $e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$

• **Sur l'intervalle** $]\ln 4, +\infty[$

On a :

$$\begin{aligned} x > \ln 4 &\Rightarrow e^x > 4 \\ &\Rightarrow e^x - 4 > 0 \\ &\Rightarrow e^x\,(e^x - 4) > 0 \\ &\Rightarrow f(x) - (2x-2) > 0 \end{aligned}$$

Donc, la courbe (C_f) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$.

• **Sur l'intervalle** $]-\infty, \ln 4[$

On a :

$$\begin{aligned} x < \ln 4 &\Rightarrow e^x < 4 \\ &\Rightarrow e^x - 4 < 0 \\ &\Rightarrow e^x\,(e^x - 4) < 0 \\ &\Rightarrow f(x) - (2x-2) < 0 \end{aligned}$$

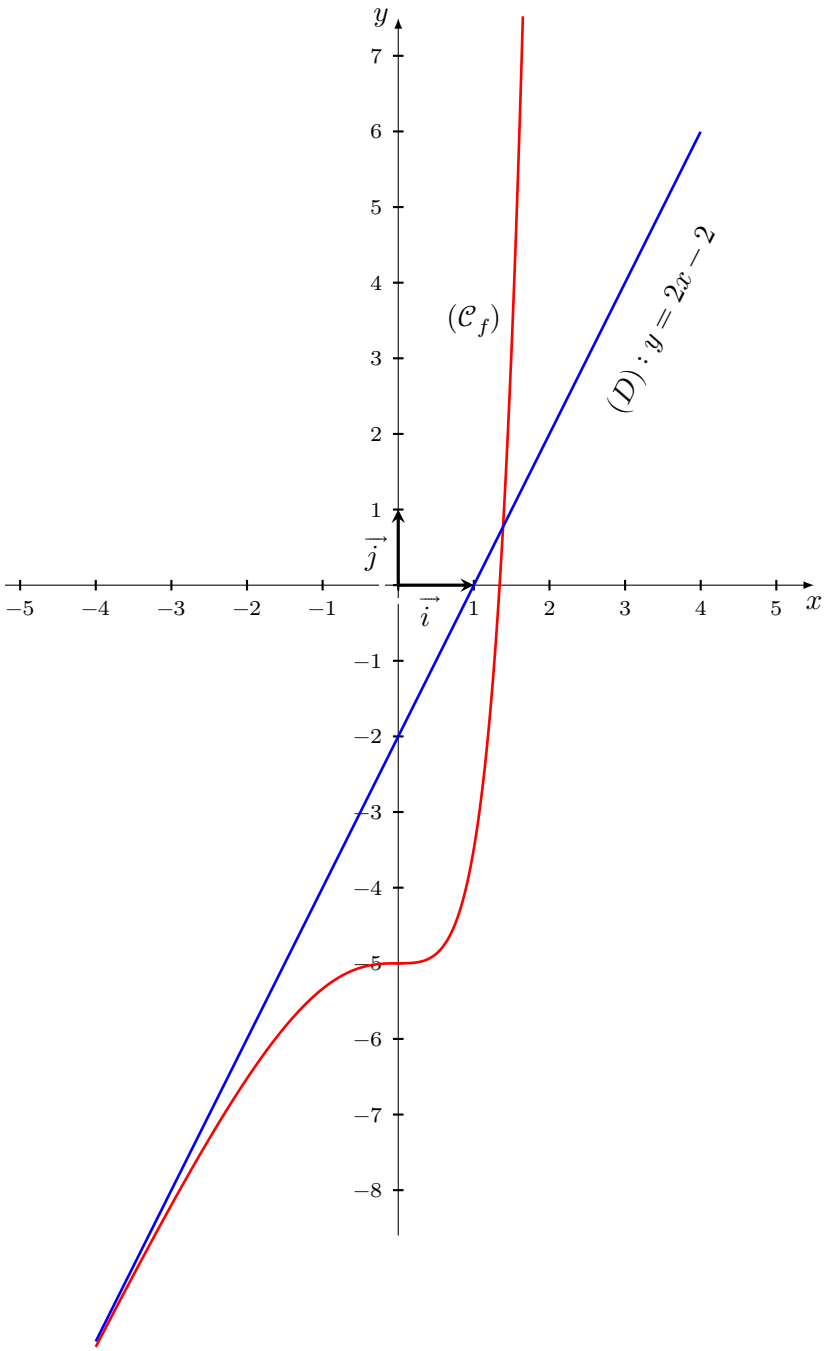
Donc, la courbe (C_f) est en-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty, \ln 4[$.

b) Montrons que la courbe (C_f) admet un seul point d'inflexion de coordonnées $(0,-5)$. 0.5 pt

Puisque la fonction dérivé f' s'annule en 0 en ne changeant pas de singe, alors le point de coordonnées $(0;f(0))$ est une point d'inflexion.

Or $f(0)=-5$ alors, le point de coordonnées $(0;-5)$ est une point d'inflexion.

c) traçons la droite (D) et la courbe (C_f) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. 0.75 pt



5 - a) Montrons que $\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-4e^x)dx=-\frac{9}{2}$. 0.5 pt

On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-4e^x)dx &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}-4e^x\right]_0^{\ln 4}\\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2\ln 4}-4e^{\ln 4}\right]-\left[\frac{1}{2}e^{2\times 0}-4e^0\right]\\ &= \left[\frac{1}{2}\times 16-4\times 4\right]-\left[\frac{1}{2}\times 1-4\times 1\right]\\ &= 8-16-\frac{1}{2}+4\\ &= -4+\frac{1}{2}\\ &= \frac{-9}{2}\end{aligned}$$

Donc, $\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-4e^x)dx = -\frac{9}{2}$.

b) Calculons en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 4$. **0.5 pt**

On a : $A = \int_0^{\ln 4} \mid f(x)-(2x-2) \mid dx \times \parallel \vec{i} \parallel \parallel \vec{j} \parallel$

Puisque : $f(x)-(2x-2) \leqslant 0$ sur l'intervalle $[0;\ln 4]$ alors,

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{\ln 4} -\left(f(x)-(2x-2)\right)dx \times \text{cm}^1 \times \text{cm}^1\\ &= -\int_0^{\ln 4}\left(f(x)-(2x-2)\right)dx \times \text{cm}^2\\ &= -\int_0^{\ln 4}(e^{2x}-4e^x)dx \times \text{cm}^2\\ &= -(\frac{-9}{2}) \times \text{cm}^2\\ &= \frac{9}{2} \times \text{cm}^2\end{aligned}$$

Donc, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 4$ est $\frac{9}{2} \times \text{cm}^2$.

Partie II

1 - a) Résolvons l'équation différentielle $(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$. **0.5 pt**

On a : l'équation caractéristique de (E) est : $r^2 - 3r + 2 = 0$

Puisque $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$.

Alors, l'équation caractéristique admet deux solutions distincts :

$r_1 = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$

$r_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 1} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$

Donc, les solution de l'équation différentielle (E) sont les fonction $x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

c'est-à-dire : les fonction $x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{2x}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

b) Déterminons la solution g de l'équation (E) qui vérifie les deux conditions : $g(0) = -3$ et $g'(0) = -2$. **0.5 pt**

On a : la fonction g solution de l'équation (E) alors, $g(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
Déterminons les valeurs de α et β.
On a : la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivé $g'(x) = \alpha e^x + 2\beta e^{2x}$
Alors,

$$\begin{cases} g(0) = -3 \\ g'(0) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -3 \\ \alpha + 2\beta = -2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

alors, $g(x) = -4e^x + 1 \times e^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc, $g(x) = e^{2x} - 4e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2 - Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x).$$

a) **Montrons que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} et que h^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$.** **0.75 pt**
On a : $h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x) = \ln(g(x)) = \ln(f(x) - (2x - 2))$.
• On a : la fonction g est continue et strictement positive sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$.
(Car, la fonction g est une solution de l'équation (E), alors il est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et se trouve au-dessus de la droite(D) sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$) et la fonction ln est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ en particulier continue sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$
Donc **la fonction h est continue sur l'intervalle** $]\ln 4, +\infty[$**.**
• On a : la fonction h est dérivable sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ et sa fonction dérivé :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\ln(e^{2x} - 4e^x)\right)' \\ &= \frac{(e^{2x} - 4e^x)'}{(e^{2x} - 4e^x)} \\ &= \frac{2e^{2x} - 4e^x}{e^{2x} - 4e^x} \\ &= \frac{2(e^x - 2)}{e^x - 4} \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ on a : $e^x - 2 > 0$ et $e^x - 4 > 0$ alors, $h'(x) > 0$ pour tout $x \in]\ln 4, +\infty[$.
Donc **la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle** $]\ln 4, +\infty[$.
Puisque la fonction h est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$.
Alors la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J telle que :

$$\begin{aligned} J &= h\left(]\ln 4, +\infty[\right) \\ &=]\lim_{x \to \ln 4^+} h(x), \lim_{x \to +\infty} h(x)[\\ &=]-\infty; +\infty[\\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

En effet, $\begin{cases} \lim\limits_{x \to \ln 4^+} h(x) = \lim\limits_{x \to \ln 4^+} \ln(e^{2x} - 4e^x) = \lim\limits_{t \to 0^+} h(t) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(e^{2x} - 4e^x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(e^x(e^x - 4) = +\infty \end{cases}$

b) **Vérifions que $h(\ln 5) = \ln 5$ puis déterminons $(h^{-1})'(\ln 5)$.** **0.75 pt**
• **Vérifions que $h(\ln 5) = \ln 5$**

On a :

$$\begin{aligned} h(\ln 5) &= \ln(e^{2\ln 5} - 4e^{\ln 5}) \\ &= \ln(e^{\ln 25} - 4 \times 5) \\ &= \ln(25 - 20) \\ &= \ln 5 \end{aligned}$$

• **Déterminons** $(h^{-1})'(\ln 5)$**.**
On a : la fonction h est dérivable en $\ln 5$ et $h'(\ln 5) = 6 \neq 0$.
Alors, la fonction h^{-1} est dérivable en $\ln 5$ est on a :

$$\begin{aligned} (h^{-1})'(\ln 5) &= (h^{-1})'(h(\ln 5)) \\ &= \frac{1}{h'(\ln 5)} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Donc, $h(\ln 5) = \ln 5$ et $(h^{-1})'(\ln 5) = \dfrac{1}{6}$