ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2016

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

1 - On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16}$ pour tout entier naturel n

0.5 pt **a)** Montrons par récurrence que $u_n > 1$ pour tout entier naturel n.

Pour $n = 0$; on a : $u_0 = 2 > 1$. Relation vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

On suppose que : $u_n > 1$ et on montre que $u_{n+1} > 1$

$$\begin{aligned} u_n > 1 &\Rightarrow \frac{1}{16}u_n > \frac{1}{16} \\ &\Rightarrow \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} > \frac{1}{16} + \frac{15}{16} \\ &\Rightarrow u_{n+1} > 1 \end{aligned}$$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n > 1$.

0.5 pt **b)** Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}\Big(u_n - 1\Big)$ pour tout entier naturel n puis montrer que la suite (u_n) est décroissante.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} - u_n \\ &= \left(\frac{1}{16} - 1\right)u_n + \frac{15}{16} \\ &= \frac{-15}{16}u_n + \frac{15}{16} \\ &= \frac{-15}{16}\Big(u_n - 1\Big) \end{aligned}$$

On sait que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n > 1 \Rightarrow u_n - 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{-12}{16}\left(u_n - 1\right) < 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

0.25 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1 ($(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 1$) alors elle est convergente.

2 - Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 1$ pour tout entier naturel n.

1 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{16}$ puis écrire v_n en fonction de n. • $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{16}u_n + \dfrac{15}{16} - 1 = \dfrac{1}{16}u_n - \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{16}\left(u_n - 1\right) = \boxed{\dfrac{1}{16}v_n}$

Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{16}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

• On a : $v_n = v_0 q^n = 1 \times \left(\dfrac{1}{16}\right)^n$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\boxed{v_n = \left(\dfrac{1}{16}\right)^n}$

0.75 pt **b)** Montrer que $u_n = 1 + \left(\dfrac{1}{16}\right)^n$ pour tout entier naturel n, puis déterminer la limite de la suite (u_n).

• On a $v_n = u_n - 1$ donc $u_n = v_n + 1$

Et puisque $v_n = \left(\dfrac{1}{16}\right)^n$ alors $u_n = 1 + \left(\dfrac{1}{16}\right)^n$

• On a $-1 < \dfrac{1}{16} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \left(\dfrac{1}{16}\right)^n = 1 + 0 = 1$

Exercice 2 : (3 pts)

1 - Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 3, 4)$ et $B(0, 1, 2)$.

0.5 pt **a)** Montrer que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

On a $\overrightarrow{OA}(1; 3; 4)$ $\quad$ $\overrightarrow{OB}(0; 1; 2)$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = \boxed{2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}$$

0.5 pt **b)** Montrer que $2x - 2y + z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

On sait que le vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}(2; -2; 1)$ est un vecteur normal au plan (OAB)

Alors l'équation de (OAB) s'écrit sous la forme : $2x - 2y + z + d = 0$

$O \in (OAB) \Rightarrow 2 \times 0 - 2 \times 0 + 0 + d = 0$

$\Rightarrow d = 0$

D'où $\boxed{(OAB) : \quad 2x - 2y + z = 0}$

2 - Soit (S) la sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2-6x+6y-6z+2=0$.

0.5 pt Montrer que (S) a pour centre le point $\Omega(3,-3,3)$ et pour rayon 5

$x^2+y^2+z^2-6x+6y-6z+2=0$

$\Rightarrow x^2-6x+9-9+y^2+6y+9-9+z^2-6z+9-9+2=0$

$\Rightarrow (x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=5^2$

D'où (S) est la sphère de centre $\Omega(3;-3;3;)$ et de rayon $r=5$.

0.75 pt **3 - a)** Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S)

On a :

$$\begin{aligned} d(\Omega;(OAB)) &= \frac{|2x_\Omega-2y_\Omega+z_\Omega|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} \\ &= \frac{|6+6+3|}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{15}{3} \\ &= \boxed{5} \end{aligned}$$

Puisque $d(\Omega;(OAB))=R$, alors le plan (OAB) est tangent à la sphère (S)

Pour déterminer les coordonnées de H, on doit déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par (Ω) et perpendiculaire à (P).

$\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}(2;-2;1)$ est un vecteur normal à (OAB) donc c'est un vecteur directeur de (Δ).

Donc $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-3-2t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=3+t \end{cases}$

0.75 pt **b)** Déterminer les coordonnées du point de contact H du plan (OAB) et de la sphère (S).

L'intersection de (S) et (OAB) est la solution du système

$\begin{cases} x=3+2t \\ y=-3-2t \\ z=3+t \\ 2x-2y+z=0 \end{cases}$

On remplace x, y et z dans la 4 ème équation, on trouve :

$6+4t+6+4t+3+t=0\Rightarrow 9t+16=0\Rightarrow t=\dfrac{-16}{9}=\dfrac{-5}{9}$

Donc $\begin{cases} x=3-\dfrac{10}{3}=\dfrac{-1}{3} \\ y=-3+\dfrac{10}{3}=\dfrac{1}{3} \\ z=3-\dfrac{5}{3}=\dfrac{4}{3} \end{cases}$

$\boxed{H\left(\frac{-1}{3};\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)}$

Exercice 3 : (3 pts)

0.75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes C l'équation : $z^2-8z+41=0$.

$\Delta=(-8)^2-4\times 41=64-164=-100=(10i)^2$

$z_1=\dfrac{8+10i}{2}=4+5i \quad$ et $\quad z_2=\overline{z_1}=4-5i$

$\boxed{S=\{4+5i;4-5i\}}$

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A,B,C et Ω d'affixes respectives a,b,c et ω telles que $a=4+5i$, $b=3+4i$, $c=6+7i$ et $\omega=4+7i$.

0.75 pt **a)** Calculer $\dfrac{c-b}{a-b}$ puis en déduire que les points A,B et C sont alignés.

On a :

$$\begin{aligned}\frac{c-b}{a-b}&=\frac{6+7i-3-4i}{4+5i-3-4i}\\&=\frac{3+3i}{1+i}\\&=\frac{3(1+i)}{1+i}=3\end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{c-b}{a-b}=3\in\mathbb{R}$ alors les points A, B et C sont alignés.

0.75 pt **b)** Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Montrer que $z'=-iz-3+11i$.

$$\begin{aligned}R(M)=M' &\Leftrightarrow z'-\omega=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-\omega)\\&\Leftrightarrow z'=4+7i-i(z-4-7i)\\&\Leftrightarrow z'=4+7i-iz+4i-7\\&\Leftrightarrow \boxed{\text{z'=-iz-3+11i}}\end{aligned}$$

0.75 pt **c)** Déterminer l'image du point C par la rotation R puis donner une forme trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{a-\omega}{c-\omega}$.

- $z'=-iz-3+11i$

Donc

$$\begin{aligned} c' &= -ic - 3 + 11i \\ &= -i(6+7i) - 3 + 11i \\ &= -6i + 7 - 3 + 11i \\ &= 4 + 5i = a \end{aligned}$$

D'où $\boxed{R(C) = A}$

• On a :

$$\begin{aligned} \frac{a-\omega}{c-\omega} &= \frac{4+5i-4-7i}{6+7i-4-7i} = \frac{-2i}{2} = -i \\ &= 0 - 1i \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\frac{a-\omega}{c-\omega} = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)}$

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient 10 boules portant les nombres $1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4$ (Les boules sont indiscernables au toucher).

On considère l'expérience suivante : on tire au hasard , successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

1 pt **1 -** Soit A l'évènement :" Obtenir deux boules portant deux nombres pairs".

Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$.

$card(\Omega) = A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = 10 \times 9 = \boxed{90}$

$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{A_6^2}{90} = \frac{30}{90} = \boxed{\frac{1}{3}}$

2 pt **2 -** On répète l'expérience précédente trois fois de suite, en remettant dans l'urne les deux boules tirées après chaque expérience. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'évènement A est réalisé.

Montrer que $p(X=1) = \frac{4}{9}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

On répète la même expérience 3 fois de suite dans les mêmes conditions, donc la variable aléatoire X suit une loi binômiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{3}$

$p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$p(X=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{13}\right)^{3-1} = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \boxed{\frac{4}{9}}$

$p(X=0) = C_3^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{13}\right)^{3-0} = 1 \times 1 \times \frac{8}{27} = \boxed{\frac{8}{27}}$

$$p(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{13}\right)^{3-2}=3\times\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}=\boxed{\frac{2}{9}}$$

$$p(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{13}\right)^{3-3}=1\times\frac{1}{27}\times 1=\boxed{\frac{1}{27}}$$

Problème : (8 pts)

Partie I

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{2}{x}-1+2\ln x$

On donne, ci-contre, le tableau de variation de g sur $]0;+\infty[$.

0,25 pt

1 - Calculer $g(1)$.

$g(1)=\dfrac{2}{1}-1+2\ln 1=2-1+2\times 0=\boxed{1}$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

0,75 pt

2 - En déduire à partir du tableau que $g(x)>0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

D'après le tableau de variations, la fonction g admet un minimum

Alors pour tout x de $]0;+\infty[$, on a $g(x)\geq g(1)$

Et puisque $g(1)=1$ alors $(\forall x\in]0;+\infty[)\quad g(x)\geq 1$

D'où $(\forall x\in]0;+\infty[)\quad g(x)>0$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=3-3x+2(x+1)\ln x$.

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité $2cm$.

0.75 pt

1 - Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(3-3x+2(x+1)\ln x)=\boxed{-\infty}$ car $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$
- On a $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

Alors la courbe (C_f) admet la droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) comme asymptote verticale.

0.5 pt

2 - a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (Remarque que $f(x)$ s'écrit sous la forme $f(x)=x\left[\dfrac{3}{x}-3+2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln x\right]$)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x)&=\lim_{x\to+\infty}(3-3x+2(x+1)\ln x)\\&=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{3}{x}-3+2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right)\\&=\boxed{+\infty}\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$

0.5 pt

b) Étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3}{x} - 3 + 2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\ln x\right) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$

Alors (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

0.75 pt

3 - a) Montrer que $f'(x) = g(x)$, pour tout x de $]0,+\infty[$.

Soit $x \in]0;+\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3 - 3x + 2(x+1)\ln x)' \\ &= -3 + 2\left(\ln x + (x+1)\frac{1}{x}\right) \\ &= -3 + 2\ln x + 2(x+1)\frac{1}{x} \\ &= -3 + 2\ln x + 2 + \frac{2}{x} \\ &= -1 + 2\ln x + \frac{2}{x} \\ &= \frac{2}{x} - 1 + 2\ln x \\ &= \boxed{g(x)} \end{aligned}$$

0.75 pt

b) Étudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation sur $]0,+\infty[$.

On a $g(x) > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$

Alors $f'(x) > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$

D'où f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

0.5 pt

4 - a) Montrer que $I(1;0)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C_f).

$$f"(x) = g'(x) = \left(\frac{2}{x} - 1 + 2\ln x\right)'$$
$$= \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x}$$
$$= \boxed{\frac{-2+2x}{x^2}}$$

$f"(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f"(x)$		$-$	0	$+$	

$f"(x)$ s'annule en 1 et change de signe, donc $I(1;0)$ est un point d'inflexion.

0.25 pt **b)** Montrer que $y = x-1$ est l'équation de la tangente (T) au point $I(1;0)$ à la courbe (C_f).

$f'(x) = g(x) = \frac{2}{x} - 1 + 2\ln x$

$f'(1) = \frac{2}{1} - 1 + 2\ln 1 = 1$

Donc l'équation de la tangente (T) s'écrit sous la forme : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\Rightarrow \quad y = 1(x-1) + 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(T) : y = x - 1}$

0.75 pt **c)** Tracer sur le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C_f).

0.5 pt **5 - a)** Montrer que : $\int_1^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) dx = \frac{7}{4}$

$$I = \int_1^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[x + \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2 + \frac{4}{4} - \left(1 + \frac{1}{4}\right) = 3 - \frac{5}{4} = \boxed{\frac{7}{4}}$$

0.75 pt **b)** Montrer, en utilisant une intégration par parties, que : $\int_1^2 (x+1)\ln x dx = 4\ln 2 - \frac{7}{4}$.

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
A &= \left[\frac{1}{2}(x+1)^2\ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x}\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{2}\times 3^2\ln 2 - 0\right) - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2+2x+1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{9}{2}\ln 2 - \int_1^2 \left(x+2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{9}{2}\ln 2 - \int_1^2 \frac{x+2}{2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{9}{2}\ln 2 - \int_1^2 \left(1+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\Big[\ln x\Big]_1^2 \\
&= \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{7}{4} - \frac{1}{2}\Big(\ln 2 - 0\Big) \\
&= \boxed{4\ln 2 - \frac{7}{4}}
\end{aligned}$$

0.5 pt

c) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisseset les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

$$\begin{aligned}
S &= \int_1^2 |f(x)|\mathrm{d}x \times 2cm \times 2cm \\
&= \int_1^2 (3-3x+2(x+1)\ln x\mathrm{d}x \times 4cm^2 \\
&= \left(3\int_1^2 3(1-x)\mathrm{d}x + 2\int_1^2 (x+1)\ln x\mathrm{d}x\right) \times 4cm^2 \\
&= \left[3\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 2A\right] \times 4cm^2 \\
&= \left[3(2-2) - 3\left(1-\frac{1}{2}\right) + 2\times\left(4\ln 2 - \frac{7}{4}\right)\right] \times 4cm^2 \\
&= \left[\frac{-3}{2} + 8\ln 2 - \frac{7}{2}\right] \times 4cm^2 \\
&= (8\ln 2 - 5) \times 4cm^2 \\
&= \boxed{(32\ln 2 - 20)cm^2}
\end{aligned}$$

0.5 pt

6 - Résoudre graphiquement, dans l'intervalle $]0;+\infty[$, l'inéquation : $(x+1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x-1)$.

$$(x+1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x-1) \Leftrightarrow 2(x+1)\ln x \geq 3x-3$$

$$\Leftrightarrow 3-3x+2(x+1)\ln x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [1;+\infty[$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S=[1;+\infty[}$$

FIN