Exercice 1 — Session : NORMAL 2016 — 3 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3+u_n}{5-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 - Vérifier que : $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis montrer par récurrence que $u_n < 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$. — **0,75 pt**

2 - Soit (v_n) la suite numérique définie par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{3-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et en déduire que $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. — **0,75 pt**

b) Montrer que $u_n = \dfrac{1+3v_n}{1+v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis exprimer (u_n) en fonction de n. — **0,5 pt**

c) Déterminer la limite de la suite (u_n). — **0,5 pt**

Exercice 2 — Session : NORMAL 2016 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(2,1,3)$, $B(3,1,1)$ et $C(2,2,1)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$$

1 - a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. — **0,5 pt**

b) En déduire que $2x + y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC). — **0,5 pt**

2 - a) Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1,-1,0)$ et son rayon est 6. — **0,5 pt**

b) Montrer que $d(\Omega,(ABC)) = 3$ et en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ). — **0,5 pt**

3 - a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC) — **0,5 pt**

b) Montrer que le centre du cercle (Γ) est le point B. — **0,5 pt**

Exercice 3 — Session : NORMAL 2016 — 3 Pts

1 - Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : — **0,75 pt**

$$z^2 - 4z + 29 = 0$$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les points Ω, A et B d'affixes respectives : $\omega = 2+5i$, $a = 5+2i$ et $b = 5+8i$

a) Soit u le nombre complexe tel que : $u = b - \omega$. — **0,75 pt**

Vérifier que $u = 3+3i$ puis montrer que $\arg u \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

b) Déterminer un argument du nombre complexe $\overline{u}$ ($\overline{u}$ étant le conjugué de u). — **0,25 pt**

c) Vérifier que $a - \omega = \overline{u}$ puis en déduire que : $\Omega A = \Omega B$ et $\arg\left(\dfrac{b-\omega}{a-\omega}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. — **0,75 pt**

d) On considère la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. — **0,5 pt**

Déterminer l'image du point A par la rotation R.

Exercice 4 — Session : NORMAL 2016 — 3 Pts

Une urne contient 10 boules : quatre boules rouges et six boules vertes. (les boules sont indiscernables au toucher).

On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1 pt — **1 -** Soit A l'évènement : "les deux boules tirées sont rouges ". Montrer que $p(A) = \frac{2}{15}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le nombre de boules rouges restantes dans l'urne.

0,5 pt — **a)** Montrer que l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X est $\{2, 3, 4\}$.

1,5 pt — **b)** Montrer que $p(X = 3) = \frac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 5 — Session : NORMAL 2016 — 8.5 Pts

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x$. Et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité : $1cm$)

Partie I

0.25 pt — **1 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est une asymptote à la courbe (C_f) au

0.5 pt — voisinage de $-\infty$

0.5 pt — **2 - a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

0.5 pt — **b)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0.5 pt — **3 - a)** Montrer que $f'(x) = 2(e^x - 1)^2$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.25 pt — **b)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. (remarquer que $f'(0) = 0$).

0.75 pt — **c)** Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $]1, \ln 4[$ tel que : $f(\alpha) = 0$.

4 - a) Montrer que la courbe (C_f) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ et

0.5 pt — qu'elle est en-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty, \ln 4[$.

0.5 pt — **b)** Montrer que la courbe (C_f) admet un seul point d'inflexion de coordonnées $(0, -5)$.

0.75 pt — **c)** tracer la droite (D) et la courbe (C_f) dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(on prendra $\ln 4 \approx 1,4$ et $\alpha \approx 1,3$)

0.5 pt — **5 - a)** Montrer que $\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x)\mathrm{d}x = -\frac{9}{2}$.

b) Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe

0,5 pt — des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 4$.

Partie II

0,5 pt — **1 - a)** Résoudre l'équation différentielle (E) : $y" - 3y' + 2y = 0$.

b) Déterminer la solution g de l'équation (E) qui vérifie les deux conditions : $g(0) = -3$ et

0,5 pt — $g'(0) = -2$.

2 - Soit h la fonction numérique définie sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ par : $h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x)$

a) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} et que h^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$. **0,75 pt**

b) Vérifier que $h(\ln 5) = \ln 5$ puis déterminer $(h^{-1})'(\ln 5)$. **0,75 pt**

FIN