Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2016 — 3 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

0,5 pt **1 - a)** Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout entier naturel n.

0,5 pt **b)** Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$ pour tout entier naturel n puis montrer que la suite (u_n) est décroissante.

0,25 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2 - Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 1$ pour tout entier naturel n.

1 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{16}$ puis écrire v_n en fonction de n.

0,75 pt **b)** Montrer que $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ pour tout entier naturel n, puis déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2016 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 3, 4)$ et $B(0, 1, 2)$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

0,5 pt **b)** Montrer que $2x - 2y + z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

2 - Soit (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 6z + 2 = 0$.

0,5 pt Montrer que (S) a pour centre le point $\Omega(3, -3, 3)$ et pour rayon 5.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S).

0,75 pt **b)** Déterminer les coordonnées du point de contact H du plan (OAB) et de la sphère (S).

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2016 — 3 Pts

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes C l'équation : $z^2 - 8z + 41 = 0$.

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives a, b, c et ω telles que $a = 4 + 5i$, $b = 3 + 4i$, $c = 6 + 7i$ et $\omega = 4 + 7i$.

0,75 pt **a)** Calculer $\frac{c-b}{a-b}$ puis en déduire que les points A, B et C sont alignés.

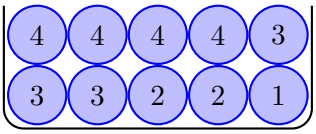
b) Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

0,75 pt Montrer que $z' = -iz - 3 + 11i$.

0,75 pt **c)** Déterminer l'image du point C par la rotation R puis donner une forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{a-\omega}{c-\omega}$.

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2016 — 3 Pts

Une urne contient 10 boules portant les nombres $1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4$ (Les boules sont indiscernables au toucher)



On considère l'expérience suivante : on tire au hasard , successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

1 - Soit A l'évènement :" Obtenir deux boules portant deux nombres pairs".

1 pt Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$.

2 - On répète l'expérience précédente trois fois de suite, en remettant dans l'urne les deux boules tirées après chaque expérience. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'évènement A est réalisé.

2 pt Montrer que $p(X = 1) = \frac{4}{9}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 5 Session : RATTRAPAGE 2016 — 8 Pts

I - On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{2}{x} - 1 + 2\ln x$

On donne, ci-contre, le tableau de variation de g sur $]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

0,5 pt **1 -** Calculer $g(1)$.

0,25 pt **2 -** En déduire à partir du tableau que $g(x) > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

II - On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 3 - 3x + 2(x+1)\ln x$

(C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité $2cm$.

0.75 pt **1 -** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

0.5 pt **2 - a)** Monter que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

$\left(\text{Remarquer que f(x) s'écrit sous la forme } f(x) = x\left[\frac{3}{x} - 3 + 2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right]\right)$

b) Monter que la courbe (C_f) admet , au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont

0,5 pt la direction est celle de l'axe des ordonnées.

0.75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = g(x)$, pour tout x de $]0,+\infty[$.

0.75 pt **b)** Étudier les variations de f, puis dresser son tableau de variation sur $]0,+\infty[$.

0.5 pt **4 - a)** Montrer que $I(1;0)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C_f).

0.25 pt **b)** Montrer que $y = x - 1$ est l'équation de la tangente (T) au point $I(1;0)$ à la courbe . (C_f)

0,75 pt **c)** Tracer sur le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C_f).

0.5 pt **5 - a)** Montrer que : $\int_1^2 \left(1+\frac{x}{2}\right)dx = \frac{7}{4}$.

0,75 pt **b)** Montrer, en utilisant une intégration par parties, que : $\int_1^2 (x+1)\ln x dx = 4\ln 2 - \frac{7}{4}$.

0.5 pt **c)** Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$

0.5 pt **6 -** Résoudre graphiquement, dans l'intervalle $]0;+\infty[$, l'inéquation : $(x+1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x-1)$.

FIN