Exercice 1 — Session : NORMAL 2017 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère le plan (P) pasant par le point $A(0,1,1)$ et dont $\vec{u}(2;0;2)$ est un vecteur normal et la sphère (S) de centre le point $\Omega(0;1;-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que : $x-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (P) .

0,75 pt **b)** Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) et vérifier que $B(-1;1;0)$ est le point de contact .

0,25 pt **2 - a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et orthogonale au plan (P).

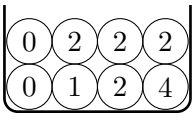
0,75 pt **b)** Montrer que la droite (Δ) est tangent à la sphère (S) au point $C(1;1;0)$.

0,75 pt **3 -** Montrer que : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$ et en déduire l'aire du triangle OCB .

Exercice 2 — Session : NORMAL 2017 — 3 Pts

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher portant chacune un nombre comme indiqué sur la figure ci-contre.

On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.



1,5 pt **1 -** Soit A l'événement : " Parmi les trois boules tirées , aucune ne porte le nombre 0 "
et B l'événement:" le produit des nombres portés par les trois boules tirées est égale à 8 "
Montrer que : $p(A)=\frac{5}{14}$ et que : $p(B)=\dfrac{1}{7}$

2 - Soit X le variable aléatoire qui à chaque tirage associe le produit des nombres portés par les trois boules tirées

0,5 pt **a)** Montrer que : $p(X=16)=\dfrac{3}{28}$.

1 pt **b)** Le tableau ci-contre concerne la loi de probabilité de la variable aléatoire X
Recopier sur votre copie et compléter le tableau en justifiant chaque réponse.

x_i	0	4	8	16
$p(X=x_i)$				$\frac{3}{28}$

Exercice 3 — Session : NORMAL 2017 — 3 Pts

On considère les nombres complexes a et b tels que : $a=\sqrt{3}+i$ et $b=\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que $b=(1+i)a$.

0,5 pt **b)** En déduire que $|b|=2\sqrt{2}$ et que $\arg b\equiv\dfrac{5\pi}{12}[2\pi]$

0,5 pt **c)** Déduire ce qui précède que : $cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2 - Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère les points A et B d'affixes respectives a et b et le point C d'affixe c telle que : $c=-1+i\sqrt{3}$

0,75 pt **a)** Vérifier que : $c=ia$ et en déduire que $OA=OC$ et que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

0,5 pt **b)** Montrer que le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.

0,5 pt **c)** En déduire que la quadrilatère $OABC$ est un carré.

Exercice 4 — Session : NORMAL 2017 — 11 Pts

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 + x - 2 + 2\ln x$ On donne, ci-contre, le tableau de variation de g sur $]0;+\infty[$.

0,25 pt **1 -** Vérifier que : $g(1) = 0$.

2 - À partir du tableau de variation de la fonction g ci-contre :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

1 pt Montrer que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartient à l'intervalle $]0;1]$ et que $g(x) \geq 0$ pour tout x appartient à l'intervalle $[1;+\infty[$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x + \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)\ln x$

Soit (C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité $1cm$).

0.5 pt **1 -** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ et interpréter géométriquement le résultat .

0.25 pt **2 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

0,75 pt **b)** Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique celle de la droite (D) d'équation $y = x$.

1 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, pour tout x appartient à l'intervalle $]0,+\infty[$.

0.75 pt **b)** Montrer que f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

0.25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

0.5 pt **4 - a)** Résoudre dans l'intervalle $]0,+\infty[$ l'équation : $(1 - \dfrac{2}{x})\ln x = 0$.

0.5 pt **b)** En déduire que la courbe (C) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées.

0,75 pt **c)** Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;2]$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (D) sur l'intervalle $[1,2]$.

1 pt **5 -** Tracer sur le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C) (On admettra que la courbe (C) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 2.4 et 2.5).

0.5 pt **6 - a)** Montrer que : $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x} x = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

0.25 pt **b)** Montrer que la fonction : $H : x \longrightarrow 2\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \longrightarrow \dfrac{2}{x} - 1$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

0,5 pt **c)** Montrer, à l'aide une intégration par parties, que : $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right) \ln x x = (1 - \ln 2)^2$.

0.5 pt **d)** Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

III- On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = \sqrt{3} \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

0.5 pt **1 -** Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n.

0.5 pt **2 -** Montrer que la suite (u_n) est décroissante.(On pourra utiliser le résultat du question II-4)c))

0.75 pt **3 -** En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite..

FIN