Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2017 — 3 Pts

L'espace es trapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère la sphère (S) d'équation $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$ et le plan (P) d'équation $y-z=0$.

0.5 pt **1 - a)** Montrer que la sphère (S) à pour centre le point $\Omega(1,1,1)$ et pour rayon est 2.

0.5 pt **b)** Calculer $d(\Omega,(P))$ et en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C).

0.5 pt **c)** Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).

2 - Soit (Δ) la droite passant par le point $A(1,-2,2)$ et orthogonale au plan (P).

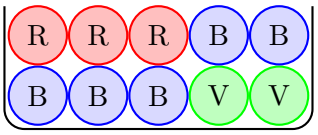
0.25 pt **a)** Montrer que $\vec{u}(0,1,-1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

0.75 pt **b)** Montrer que $\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\|=\sqrt{2}\|\vec{u}\|$ et en déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.

0.5 pt **c)** Déterminer les coordonnées de chaque points d'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S).

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2017 — 3 Pts

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : *cinq* boules blanches, trois boules rouges et deux boules vertes (voir la figure ci-contre).



On tire au hasard, simultanément, **quatre** boules de l'urne.

1 - Soit A l'événement : " Parmi les quatre boules tirées, une seule boule verte "
et B l'événement : " Parmi les quatre boules tirées, il y 'a exactement trois boules de même couleur "

1.5 pt Montrer que $p(A)=\dfrac{8}{15}$ et que $p(B)=\dfrac{19}{70}$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.

0.5 pt **a)** Montrer que $p(X=2)=\dfrac{2}{15}$.

1 pt **b)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et montrer que l'espérance mathématique est égale à $\dfrac{4}{5}$.

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2017 — 3 Pts

0.75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+4z+8=0$

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A,B et C d'affixes respectives a, b et c telles que :

$$a=-2+2i,\qquad b=4-4i \quad \text{et} \quad c=4+8i.$$

0.5 pt **a)** Soit z l'affixe d'un point M du plan et z ' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
Montrer que $z'=-iz-4$.

0.75 pt **b)** Vérifier que le point B est l'image du point C par la rotation R et en déduire la nature du triangle ABC.

3 - Soit ω l'affixe du point Ω, milieu du segment $[BC]$.

0.5 pt **a)** Montrer que $|c-\omega|=6$.

0.5 pt **b)** Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-\omega|=6$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2017 — 2.5 Pts

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0=17 \quad \text{et} \quad u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+12 \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

0.5 pt **1 - a)** Montrer par récurrence que $u_n>16$ pour tout entier naturel n.

0.5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2 - Soit (v_n) la suite numérique tel que $v_n=u_n-16$ pour tout entier naturel n.

0.5 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

0.5 pt **b)** En déduire que $u_n=16+\left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout entier naturel n puis déterminer la limite de la suite (u_n).

0.5 pt **c)** Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n<16,001$.

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2017 — 8.5 Pts

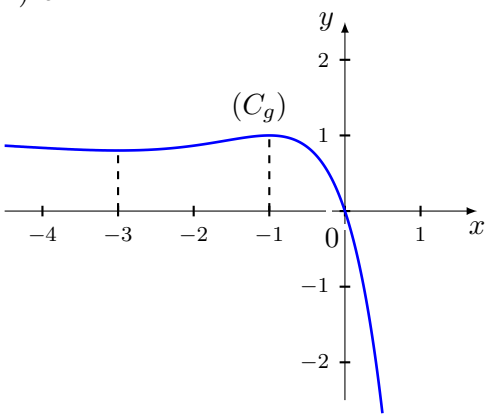
Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=1-(x+1)^2e^x$.

0.5 pt **1 -** Vérifier que : $g(0)=0$..

1 pt **2 -** A partir de la courbe représentative C_g (voir figure ci-contre)

Montrer que $g(x)\geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\infty,0]$ et que $g(x)\leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0,+\infty[$.



Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+1-\left(x^2+1\right)e^x$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2 cm).

1 - a) Vérifier que $f(x)=x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ puis en déduire que $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. 0.75 pt

0.5 pt **b)** Calculer $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y=x+1$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

0.25 pt **c)** Montrer que la courbe (C_f) est en-dessous de la droite (D).

0.5 pt **2 - a)** Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
$\left(\text{on pourra écrire } f(x) \text{ sous la forme } x\left[1+\frac{1}{x}-\left(x+\frac{1}{x}\right)e^x\right]\right)$

0.25 pt **b)** Montrer que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on déterminera la direction.

0.75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x)=g(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

0.75 pt **b)** Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty,0]$ et décroissante sur l'intervalle $[0,+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

0.75 pt **c)** Montrer que la courbe (C_f) admet deux points d'inflexion d'abscisses -3 et -1.

1 pt **4 -** Construire, dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C_f).

(on prendra $f(-3)\approx-2,5$ et $f(-1)\approx-0,75$).

0.5 pt **5 - a)** Vérifier que la fonction $H: x\mapsto(x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h: x\mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ puis montrer que $\int_{-1}^{0} xe^x dx=\frac{2}{e}-1$.

0.75 pt **b)** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_{-1}^{0}(x^2+1)e^x dx=3\left(1-\frac{2}{e}\right)$.

0.5 pt **c)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=-1$.

FIN