ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2018

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3pts pts)

les points $A(0,-2,-2)$; $B(1,-2,-4)$ et $C(-3,-1,2)$.

1 pt

1 - On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$

Donc :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&1\\-2&4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&-3\\-2&4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&-3\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

Donc : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC) donc on a :

$$\left(\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(ABC)\right)\ \overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y+2\\z+2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+2(y+2)+(z+2)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+2y+z+6=0$$

0.5 pt

$2x+2y+z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2 - la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$

$$\left(\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(S)\right)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+(y-0)^2+z^2-2z+1-25=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=25$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=5^2$$

Donc (S) est la sphère de centre $\Omega(1;0;1)$ et de rayon $R=5$.

0.25 pt

3 - a) Soit (Δ) la droite qui passe par $\Omega(1,0,1)$ et qui est perpendiculaire au plan (ABC).

Alors $\forall M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (\Delta)$ on a $\overrightarrow{\Omega M}$ et $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ sont colinéaires ;

D'où :

$$(\exists t \in \mathbb{R})/\overrightarrow{\Omega M} = t \times (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2t \\ y = 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z-1 = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \qquad (t \in \mathbb{R}). \\ z = 1+t \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \qquad (t \in \mathbb{R}) \text{ est une représentation paramétrique de } (\Delta) \\ z = 1+t \end{cases}$

0.5 pt

b) Les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) Vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \\ 2x+2y+z+6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \\ 2(1+2t)+2(2t)+(1+t)+6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \\ 9t+9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \\ t = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow H\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

0.è5 pt

Donc : $H(-1;-2;0)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

4 - On a :

$$\begin{aligned} d(\Omega;(ABC)) &= \frac{|2x_\Omega + 2y_\Omega + z_\Omega + 6|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|} \\ &= \frac{|2\times 1 + 2\times 0 + 1 + 6|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} \\ &= \frac{9}{\sqrt{9}} \\ &= 3 < 5 \end{aligned}$$

Donc le plan (ABC) coupe la sphère selon un cercle dont le centre est la projection orthogonale de Ω sur le plan (ABC) or ce point est l'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) donc c'est le point $H(-1;-2;0)$ et le rayon du cercle est : $r = \sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{25-9} = 4$.

Exercice 2 : (3 pts)

0.75 pt

1 - Soit l'équation : $(E) : 2z^2+2z+5 = 0$

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 40 = -36$

On a $\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{36}}{2 \times 2} = \frac{-1 - 3i}{2}$$
$$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{36}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \quad \text{et } z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

D'où $S = \left\{\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right); \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)\right\}$

2 - R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ **0.25 pt**

a) On a :

$$\begin{aligned} d &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Donc : $d = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ **0.5 pt**

b) Soit $A\left(a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)$

On a :

$$\begin{aligned} B = R(A) &\Leftrightarrow b = a \times e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow b = a \times \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow b = a \times d \end{aligned}$$

3 - t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$. **0.75 pt**

a) On a :

$$\begin{aligned} C = t(B) &\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \\ &\Leftrightarrow c = b + a \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} c = b + a &\Leftrightarrow c = d \times a + a \\ &\Leftrightarrow c = a \cdot (d + 1) \\ &\Leftrightarrow c = a \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) \\ &\Leftrightarrow c = a \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

0.75 pt

b) On a :

$$\begin{aligned} c = a \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} \dfrac{c}{a} = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \arg\left(\dfrac{c}{a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{c}{a}\right| = 1 \\ \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OC = OA \\ (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

On conclut que le triangle OAC est équilatéral.

Exercice 3 : (3 pts)

On tire simultanément 3 boules de la caisse : $\text{Card}\,\Omega = C_9^3 = 84$

1.5 pt

1 - ■ A « Les trois boules tirés sont de même couleur »
On a :

$$\text{Card}\,A = C_5^3 + C_4^3 = 10 + 4 = 14$$
$$P(A) = \frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$$
$$\text{Donc : } P(A) = \frac{1}{6}$$

■ B « Les trois boules tirés portent le même numéros »
On a :

$$\text{Card}\,B = C_3^3 + C_6^3 = 21$$
$$P(B) = \frac{\text{CardB}}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{21}{84} = \frac{1}{4}$$
$$\text{Donc : } P(B) = \frac{1}{4}$$

■ C « Les trois boules tirés sont de même couleur et portent le même numéros »
On a :

$$\text{CardC} = C_3^3 + C_3^3 = 2$$
$$P(C) = \frac{\text{CardC}}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}$$
$$\text{Donc : } P(C) = \frac{1}{42}$$

0.5 pt

2 - X la variable aléatoire liée à « Nombre de fois que l'événement A est réalisé »

a) Les paramètres de la variable aléatoire X sont :

- $n = 3$ (nombre de fois qu'on répète l'expérience)
- $p = P(A) = \dfrac{1}{6}$ (la probabilité de l'événement A)

1 pt

b)

$$\begin{aligned} P(X=1) &= C_n^1 \times p^1 \times (1-p)^{n-1} \\ &= n \times p \times (1-p)^{n-1} \\ &= 3 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-1} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= \frac{25}{72} \end{aligned}$$

Donc : $P(X=1)=\dfrac{25}{72}$

$$\begin{aligned}P(X=2)&=C_n^2\times p^2\times(1-p)^{n-2}\\&=C_3^2\times p^2\times(1-p)^{n-2}\\&=3\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2}\\&=3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6}\\&=\frac{5}{72}\end{aligned}$$

Donc : $P(X=2)=\dfrac{5}{72}$

Problème : (11 pts)

Partie I

$(\forall x\in\mathbb{R})\quad g(x)=e^x-x^2+3x-1$

tableau de variation de g

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$\|\|$ $-\infty$	↗	$+\infty$

0.25 pt **1 -** On a : $g(0)=e^0-0^2+3\times0-1=1-1=0$

0.5 pt **2 -** D'après le tableau de variation de g ; la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et comme on a $g(0)=0$ alors on a : $(\forall x\in]-\infty;0])\quad g(x)\leq 0\quad$ et $\quad(\forall x\in[0;+\infty[)\quad g(x)\geq 0$

Partie II

0.5 pt $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f(x)=(x^2-x)\,e^{-x}+x$

1 - a)

$$\begin{aligned}(\forall x\in\mathbb{R})\quad \frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x&=\frac{x^2-x}{e^x}+x\\&=(x^2-x)\,e^{-x}+x\\&=f(x)\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)&=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x\right)\\&=+\infty\quad\left(\text{car : }\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{\frac{x^n}{e^x}}=0\quad(n\in\mathbb{N})\right)\end{aligned}$$

0.75 pt **b)**

$$\begin{aligned}\lim_{x\mapsto+\infty}(f(x)-x)&=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x-x\right)\\&=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}\right)\\&=0\end{aligned}$$

On en déduit que $(\mathcal{C}_f)$ admet la droite (D) d'équation $y = x$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$. **0.5 pt**

c)

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \frac{x^2 - x + xe^x}{e^x} = \frac{x^2 - x}{e^x} + \frac{xe^x}{e^x}$$
$$= (x^2 - x)\, e^{-x} + x$$
$$= f(x)$$

- $$\lim_{x \mapsto -\infty} f(x) = \lim_{x \mapsto -\infty} \left(\frac{x^2 - x + xe^x}{e^x} \right)$$
$$= +\infty \quad \left(\text{Car : } \lim_{x \mapsto -\infty} xe^x = 0 \text{ et } \lim_{x \mapsto -\infty} \left(\frac{1}{e^x} \right) = +\infty \right)$$

0.5 pt

d)

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \mapsto -\infty} \left(\left(\frac{x^2 - x}{x} \right) e^{-x} + 1 \right)$$
$$= -\infty$$
$$\left(\text{Car : } \lim_{x \mapsto -\infty} \left(\frac{x^2 - x}{x} \right) = -\infty \text{ et } \lim_{x \mapsto -\infty} e^{-x} = +\infty \right)$$

Interpréter géométriquement :

$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$ de direction l'axe des ordonnées. **0.25 pt**

2 - a) On a : $(\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - x = (x^2 - x)\, e^{-x}$

Comme $(x \in \mathbb{R}) e^{-x} > 0$; Alors $f(x) - x$ et $(x^2 - x)$ ont le même signe sur $\mathbb{R}$. **0.5 pt**

b)
- On a : $(\forall x \in]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[) \quad x^2 - x \geq 0 \implies f(x) - x \geq 0$
  Donc $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de la droite (D) sur $]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$.
- $(\forall x \in [0; 1]) \quad x^2 - x \leq 0 \implies f(x) - x \leq 0$
  Donc $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de la droite (D) sur $[0; 1]$. **0.75 pt**

3 - a) On a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = \left((x^2 - x)\, e^{-x} + x \right)'$$
$$= (x^2 - x)'\, e^{-x} + (x^2 - x)\, (e^{-x})' + 1$$
$$= (2x - 1)e^{-x} - (x^2 - x)\, e^{-x} + 1$$
$$= (3x - x^2 - 1)\, e^{-x} + e^{-x} \times e^x$$
$$= (e^x - x^2 + 3x - 1)\, e^{-x}$$
$$= g(x) \cdot e^{-x}$$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = g(x) \cdot e^{-x}$ **0.5 pt**

b) D'après la question $I - 2)$ on a : $(\forall x \in]-\infty; 0]) \quad g(x) \leq 0$ et $(\forall x \in [0; +\infty[) \quad g(x) \geq 0$

On en déduit que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$. **0.25 pt**

c) tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

0.25 pt

4 - a) On a pour tout x dans $\mathbb{R}$:

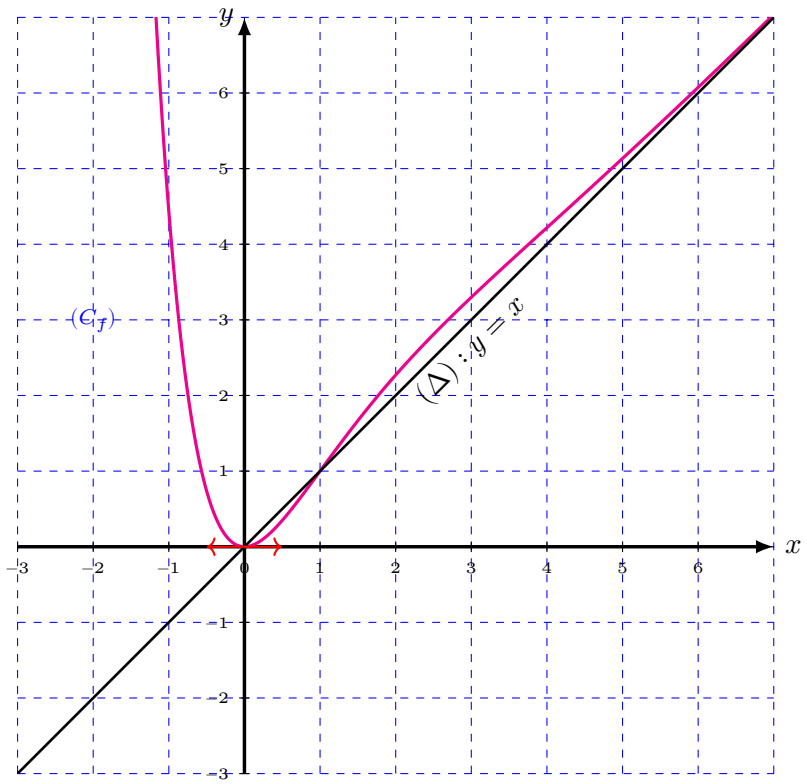
$$\begin{aligned} f''(x) &= (g(x)\cdot e^{-x})' \\ &= g'(x)\cdot e^{-x} - g(x)\cdot e^{-x} \\ &= (e^x - 2x + 3)\,e^{-x} - (e^x - x^2 + 3x - 1)\,e^{-x} \\ &= (x^2 - 5x + 4)\,e^{-x} \end{aligned}$$

0.5 pt

b) On a : $(x^2 - 5x + 4) = (x-1)(x-4)$, donc $f''(x)$ s'annule et change le signe pour $x = 1$ et $x = 4$ alors les points d'abscisse respectifs 1 et 4 sont deux points d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

1 pt

5 - Construction graphique de $(\mathcal{C}_f)$ et (D) dans le même repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.



0.5 pt

6 - a) On a :

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) \quad H'(x) &= \left((x^2 + 2x + 2)\,e^{-x}\right)' \\ &= (2x+2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 2)\,e^{-x} \\ &= -x^2 e^{-x} \end{aligned}$$

Donc : $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)\,e^{-x}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto -x^2 e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{-x} dx &= -[H(x)]_0^1 \\ &= -(H(1) - H(0)) \\ &= -5e^{-1} + 2 \\ &= \frac{2e-5}{e} \end{aligned}$$

0.75 pt

b) On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^{-x}dx &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 (u'(x)v(x))\,dx \\ &= [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (1 \times (-e^{-x} \\ &= -e^{-1} - \int_0^1 (-e^{-x})\,dx \\ &= -e^{-1} - [e^{-x}]_0^1 \\ &= -e^{-1} - (e^{-1} - 1) \\ &= 1 - 2e^{-1} \\ &= \frac{e-2}{e} \end{aligned}$$

D'où : $\int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-2}{e}$

0.75 pt

c) Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

$$A = \int_0^1 |f(x) - x|dx \quad \text{(u.a)}$$

On sait que d'après ce qui précède $f(x) - x \leq 0$ sur $[0\,;1]$

Donc :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (x - f(x))dx \text{ (u.)} \\ &= \int_0^1 (x - x^2)\,e^{-x}dx \quad \text{(u.)} \\ &= \int_0^1 xe^{-x}dx - \int_0^1 x^2e^{-x}dx \quad \text{(u.a)} \\ &= \left(\frac{e-2}{e} - \frac{2e-5}{e}\right) \text{ cm}^2 \\ &= \frac{3-e}{e} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Partie III

la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

0.75 pt

1 - Montrons par récurrence que : $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout entier naturel n.

Initialisation

Pour $n = 0$ on a : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$ alors $0 \leq u_0 \leq 1$ donc la proposition est vraie.

Hérédité

Pour $n \in \mathbb{N}$ on suppose que : $0 \leq u_n \leq 1$.

Et montrons que : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.
On a :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 1 &\Longrightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(1) \quad \text{et comme } f \text{ est croissante sur } [0\,;1] \\ &\Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

D'où d'après le principe de réccurence, on a $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout entier naturel n.
(On utilise le résultat de la question $II-3-b$))

0.5 pt

2 - le résultat de la question $II-2-b$) on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0;1] \quad f(x) - x \leq 0 &\Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad f(u_n) - u_n \leq 0 \quad (\text{ Car } u_n \in [0;1]) \\ &\Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n \leq 0 \\ &\Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} \leq u_n \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est décroissante

0.75 pt

3 - La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente.
Soit ℓ sa limite. On a :

$$\begin{cases} f(u_n) = u_{n+1} \\ f([0;1]) \subset [0;1] \\ f \text{ est continue sur } [0;1] \\ u_0 \in [0;1] \\ (u_n) \text{ est convergente} \end{cases}$$

Alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
la question $II-2-b$) on a : $f(x) = x$ pour les valeurs $x = 0$ et $x = 1$;
Or la suite (u_n) est décroissante et $u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc : $\ell \leq \dfrac{1}{2}$
D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$