ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2018

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

la sphère (S) de centre $\Omega(2,1,2)$ et de rayon $R=3$; et le plan (P) qui passe par le point $A(-1,0,3)$ et dont $\vec{u}(4,0,-3)$ est un vecteur qui lui est normal.

1 - Montrons que $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) : **0.5 pt**

Soit $\left(M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(S)\right)$ $/(S)$ est la sphére de centre $\Omega(2;1;2)$ et de rayon $R=3$ donc :

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{\Omega M}\|=3 &\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=3\\ &\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2-4z+4=9\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0\end{aligned}$$

Alors : $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

2 - Vérifions que $4x-3z+13=0$ est une équation cartésienne du plan (P) : **0.5 pt**

Soit $\left(M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(P)\right)$, on a $\overrightarrow{AM}(x+1;y;z-3)$, donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0 &\Leftrightarrow (x+1)\times 4+y\times 0+(z-3)\times(-3)=0\\ &\Leftrightarrow 4x+4-3z+9=0\\ &\Leftrightarrow 4x-3z+13=0\end{aligned}$$

D'où : $4x-3z+13=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

0.5 pt **3 - a)** Vérifions que $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire à plan (P) :

On a (Δ) la droite qui passe par $\Omega(1, 0, 1)$ et qui est perpendiculaire au plan (P), donc $\vec{u}(4, 0, -3)$ est un vecteur directeur de (Δ).

Alors $\forall M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (\Delta)$ on a : $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ (t ∈ IR)

D'où : $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ (t ∈ IR) est une représentation paramétrique de (Δ).

b) Déterminons les coordonnées du point H, point d'intersection de la droite (Δ) et du plan

0.5 pt (P) :

Les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) et du plan (P) Vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \\ 4x - 3z + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \\ 4(2 + 4t) - 3(2 - 3t) + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \\ 25t + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \\ t = -\frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow H \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \\ \frac{19}{5} \end{pmatrix}$$

Donc H a pour coordonnées $(-\frac{2}{5}; 1; \frac{19}{5})$.

0.25 pt **4 - a)** Calculons $d(\Omega, (P))$:

On a :

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|4x_\Omega - 3z_\Omega + 13|}{\|\vec{u}\|}$$
$$= \frac{|4 \times 2 - 3 \times 1 + 13|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

0.75 pt **b)** Montrons que le plan (P) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera :

On a $d(\Omega; (P)) = 3 = R$ donc le plan (P) est tangent à la sphère (S) et leur point de contact est la projection orthogonale de Ω sur le plan (P) or ce point est intersection de la droite (Δ) et du plan (P) donc c'est le point $H\left(-\frac{2}{5}; 2; \frac{19}{5}\right)$.

Exercice 2 : (3 pts)

0.75 pt **1 -** Résoudrons dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$:
On a le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{2})^2 - 4 \times 4 = 8 - 16 = -8$
D'où $\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes et conjugués :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{2} - i\sqrt{8}}{2 \times 1} = \sqrt{2}(1-i) \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{2}(1+i)$$
$$\text{D'où } S = \{(\sqrt{2}(1-i)); (\sqrt{2}(1+i))\}$$

2 - Soit $A(a = \sqrt{2}(1-i))$ et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

0.25 pt **a)** Écrivons, sous forme trigonométrique, le nombre complexe a ;
On a : $a = \sqrt{2}(1-i) \Rightarrow |a| = \sqrt{2} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$
Donc $a = \sqrt{2}1 - \sqrt{2}i = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow a = 2 \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$
Donc : $a = a = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

0.5 pt **b)** Vérifions que l'affixe du B l'image du point A par la rotation R est $b = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$:
On a :

$$\begin{aligned} B = R(A) &\Leftrightarrow b - 0 = e^{i\frac{\pi}{3}} \times (a - 0) \\ &\Leftrightarrow b = a \times e^{i\frac{\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow b = 2(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin(-\frac{\pi}{4})) \times (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) \\ &\Leftrightarrow b = 2\left(\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})\right) \\ &\Leftrightarrow b = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Donc : $b = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

0.5 pt **3 - a)** Montrons que $b^2 - c^2 = 2\sqrt{3}$:
On a :

$$\begin{aligned} b^2 - c^2 &= 2^2 \times \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^2 - (1+i)^2 \\ &= 4 \times \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) - (1^2 + 2ii^2) \\ &= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \times \frac{1}{2}i - 2i = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Donc : $b^2 - c^2 = 2\sqrt{3}$

0.5 pt **b)** Montrons que $OD = |b + c|$:
On a :

$$\begin{aligned} D = t(B) &\Leftrightarrow d = b + c \\ &\Leftrightarrow |d| = |b + c| \Leftrightarrow OD = |b + c| \end{aligned}$$

0.5 pt **c)** Déduisons que $OD \times BC = 2\sqrt{3}$:

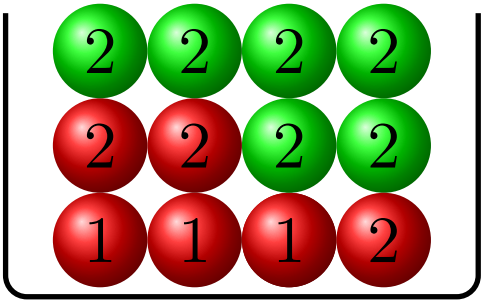
$$\begin{aligned} OD \times BC &= |b + c| \times |c - b| = |(b + c)(c - b)| \\ &= |(c + b)(c - b)| = |c^2 - b^2| = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Donc : $OD \times BC = 2\sqrt{3}$ -

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 12 boules, indiscernables au toucher, réparties comme suit :

— 3 boules Rouges portent chacune le numéro 1.
— 3 boules Rouges portent chacune le numéro 2.
— 6 boules Vertes portent chacune le numéro 2.



On tire au hasard, simultanément deux boules de la caisse, donc $\text{Card}\,\Omega = C_{12}^2 = 66$

1.5 pt **1 -** Montrons que : $p(A) = \frac{13}{22}$, $p(B) = \frac{6}{11}$ et calculons $p(C)$:

— A:" Les deux boules tirées portent le même nombre."

$\text{CardA} = C_3^2 + C_9^2 = 39$ $\{1,1\}$ ou $\{2,2\}$.
Donc : $P(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{39}{66}$
D'où : $P(A) = \frac{13}{22}$

— B:" Les deux boules tirées sont de couleurs différentes ".

$\text{CardB} = C_6^1 \times C_6^1 = 36$ $\{R, V\}$.
Donc : $P(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{36}{66}$
D'où : $P(B) = \frac{6}{11}$

— C:" Les deux boules tirées portent deux nombres dont la somme est égale à 3".

$\text{CardC} = C_3^1 \times C_9^1 = 27$ $\{1,2\}$.
Donc : $P(C) = \frac{CardC}{Card\Omega} = \frac{27}{66}$
D'où : $P(C) = \frac{9}{22}$

0.5 pt **2 - a)** Montrons que : $p(A \cap B) = \frac{3}{11}$:

On a : $(A \cap B)$: "Obtenir 2 boules qui portent le même numéros et de couleurs différentes"
$\text{Card}(A \cap B) = C_3^1 \times C_6^1 = 18$ $\{R_2, V_2\}$.
Donc : $P(A \cap B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{18}{66}$
D'où : $P(A \cap B) = \frac{3}{11}$

0.5 pt **b)** On a : $P(A) \times P(B) = \frac{13}{22} \times \frac{6}{11} \neq \frac{3}{11}$, donc : $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$
D'où les événements A et B ne sont pas indépendants.

0.5 pt **3 -** Sachant que l'événement B est réalisé, calculons la probabilité de tirer deux boules qui portent le même nombre :
l'événement "Sachant que B est réalisé ; obtenir deux boules qui portent le même numéro " c'est l'evenement A sachant B ; Calculons $P_B(A)$:

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{11}}{\frac{6}{11}} = \frac{1}{2}$$

Donc $P_B(A) = \frac{1}{2}$

Exercice 4 : (2 pts)

1 - a) (0.5 pt) Montrons que la fonction $H : x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto (x+1)e^x$ sur $\mathbb{R}$:
On a h est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une fonction primitive sur $\mathbb{R}$,d'autre part :$H'(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$ Donc la fonction $H : x \mapsto xe^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto (x+1)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

b) (0.5 pt) Déduisons que $\int_0^1 (x+1)e^x dx = e$:
On a :

$$\int_0^1 (x+1)e^x dx = [H(x)]_0^1 = H(1) - H(0) = e$$

donc

$$\int_0^1 (x+1)e^x dx = e$$

2 - (1 pt) A l'aide d'une intégration par partie, Calculons $\int_0^1 (x^2+2x-1)e^x dx$:
On pose :
$u(x) = x^2+2x-1 \quad u'(x) = 2x+2$

$v'(x) = e^x \quad v(x) = e^x$
On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2+2x-1)\,e^x dx &= \left[(x^2+2x-1)\,e^x\right]_0^1 - \int_0^1 (2x+2)e^x dx \\ &= (1^2+2-1)\,e^1 - (0^2+0-1)\,e^0 - 2\int_0^1 (x+1)e^x dx \\ &= 2e+1-2\int_0^1 (x+1)e^x dx \\ &= 2e+1-2e \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^1 (x^2+2x-1)\,e^x dx = 1$$

Exercice 5 : (9 pts)

Partie I

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1 - 2\ln^2 x + 2\ln x$, et son tableau de variation ci-dessous :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

0,25 pt **1 -** Calculons $g(1)$:
On a : $g(1) = 1^3 - 1 - 2\ln^2 1 + 2\ln 1 = 0$

0,5 pt **2 -** Déterminons le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$:
D'après le tableau de variation de g; la fonction est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et comme on a $g(1) = 0$ alors on a :
$(\forall x \in]0;1]) \Longrightarrow \quad x \leq 1 \Longrightarrow g(x) \leq 0$, et $(\forall x \in [1;+\infty[) \Longrightarrow x \geq 1 \Longrightarrow g(x) \geq 0$.

Partie II

f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2x^2} + \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2$

0,5 pt **1 - a)** Vérifions que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2x^2} + \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2\right)$

$= +\infty \quad \left(\text{Car : } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x^2} = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 = 0\right)$

b) Montrons que la droite (D) d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au
0,5 pt voisinage $+\infty$:

On a : $\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2x^2} + \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2\right) = 0$

D'où la droite (D) d'équation : $y = x - \dfrac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$.

0,25 pt **c)** Déterminons la position relative de la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C})$:
Étudions le signe de $\left[f(x) - \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\right]$:

$$\left[f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] = \left(\frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right) > 0 \quad (\forall x \in]0;+\infty[)$$

On en déduit que la courbe(C) est au-dessus de la droite (D) sur $]0;+\infty[$.

0,75 pt **2 -** Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ et interprétons le résultat géométriquement :

On a : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$

$= +\infty \quad \left(\text{Car : } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = +\infty\right)$

Interprétation géométrique

La courbe(C) admet l'axe des ordonnées comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

1 pt **3 - a)** Montrons que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$

On a : $(\forall x \in]0;+\infty[) \quad f'(x) = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)'$

$= 1 - \frac{4x}{(2x^2)^2} + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)' \times \left(\frac{\ln x}{x}\right)$

$= \frac{x^3}{x^3} - \frac{4}{4x^3} + 2\frac{\frac{1}{x}\times x - lnx}{x^2} \times \frac{lnx}{x}$

$= \frac{x^3-1}{x^3} + \frac{2(1-\ln x)\times \ln x}{x^3}$

$= \frac{x^3 - 1 - 2\ln^2 x + 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$

Donc : $(\forall x \in]0;+\infty[) \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

0.5 pt **b)** Montrons que la fonction f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

D'après la question Partie I-2- on a :

— $(\forall x \in]0;1]) \quad g(x) \leq 0 \quad$ Donc : $f'(x) \leq 0$.

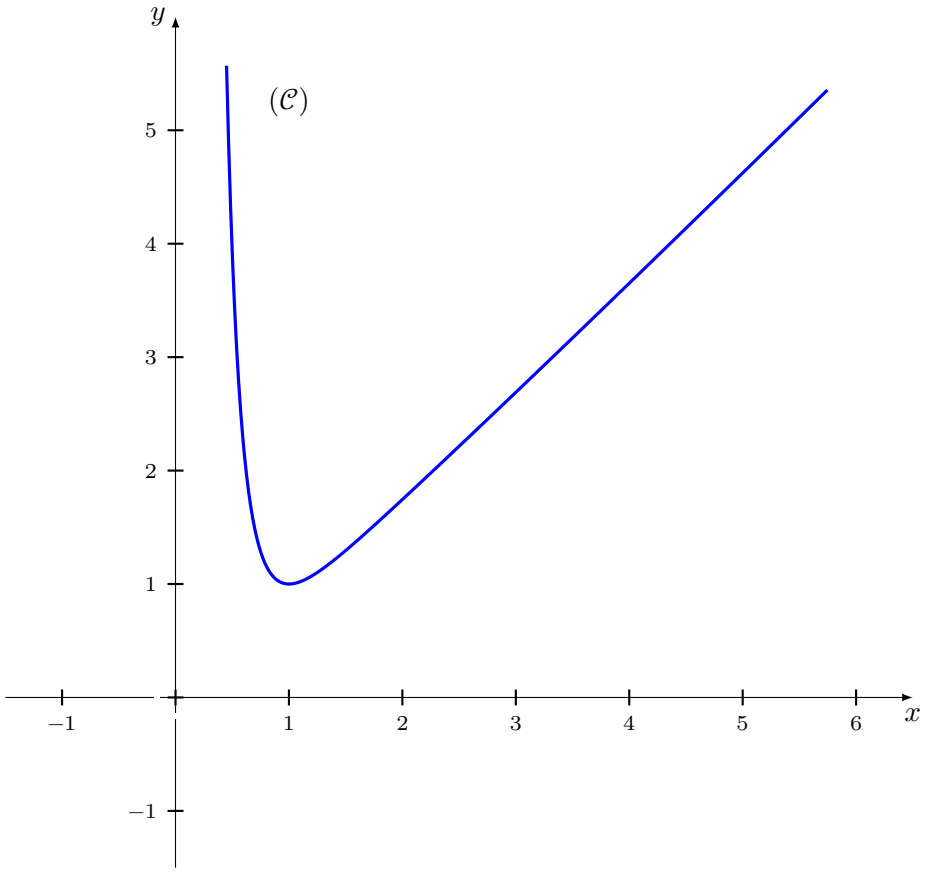
— $(\forall x \in [1;+\infty[) \quad g(x) \geq 0$ Donc $f'(x) \geq 0$.

D'où la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

0.5 pt **c)** Dressons le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

1 pt **4 -** Construisons de la courbe (C) et la droite (D) dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$ (unité de mesure est 1 cm)



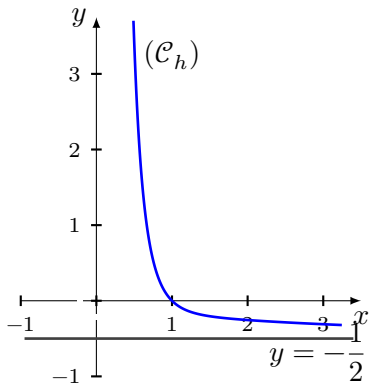
Partie III

la fonction h définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$h(x) = f(x) - x$$

0,25 pt **1 - a)** Vérifions que $h(1) = 0$:
On a : $h(1) = f(1) - 1 = 0 \quad (f(1) = 1)$

0,75 pt **b)** Déterminons le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$, puis déduisons que $f(x) \leq x$ pour tout x de l'intervalle $[1;+\infty[$:
D'après le graphique ci-dessous (C_h) est la courbe de la fonction h.



— $h(x) \geq 0$ sur l' intervalle $]0,1]$.
— $h(x) \leq 0$ sur l' intervalle $[1,+\infty[$.
On en déduit que pour tout x dans l'intervalle $[1,+\infty[$ on a : $f(x) \leq x$.

2 - La suite numérique (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = e \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$$

0,75 pt **a)** Montrons par récurrence que $1 \leq U_n \leq e$ pour tout entier naturel n :

— Initialisation :
Pour $n = 0$ On $a : 1 \leq U_0 = e \leq e$ Donc la propriété est vraie pour est vraie pour $n = 0$.
— Hérédité :
Soit $n \in IN$, Supposons que : $1 \leq U_n \leq$ e et montrons que : $0 \leq U_{n+1} \leq e$
On $a : 1 \leq U_n \leq e$ et comme f est croissante sur $[1, +\infty[$ alors :

$$1 \leq U_n \leq e \Rightarrow f(1) \leq f(U_n) \leq f(e)$$
$$\Rightarrow 1 \leq U_{n+1} \leq f(e) \leq e \qquad \forall x \in [1, +\infty[f(x) \leq x$$

Donc : $0 \leq U_{n+1} \leq e$
— Conclusion
On a montré par récurrence que $1 \leq U_n \leq e$ pour tout entier naturel n.

0.75 pt **b)** Montrons que la suite (u_n) est décroissante

(D'après la question Partie III-1-b))on $a : h(x) \leq 0$ sur $[1, +\infty[$.
Et comme $1 \leq U_n \leq e$; alors : $h(U_n) \leq 0 \Leftrightarrow f(U_n) - U_n \leq 0$
Donc : $(\forall n \in IN) \quad U_{n+1} \leq U_n$
D'où la suite (U_n) est décroissante

0.75 pt **c)** Déduisons que la suite (u_n) est convergente et déterminons sa limite .

La suite (U_n) est minorée par 1 et décroissante donc elle est convergente.
On a :

$$\begin{cases} f(U_n) = U_{n+1} \\ f([1;e]) \subset [1;e] \\ f \text{ est continue sur } [1;e] \\ U_0 \in [1;e] \\ (U_n) \text{ est convergente} \\ \text{si } \lim_{n\to+\infty} U_n = l \text{ alors l est solution de l'équation } f(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0. \end{cases}$$

D'après le graphique de h, $x = 1$ est la seule solution d'où : $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$.

FIN