Exercice 1 — Session : NORMAL 2018 — 3 Pts

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, les points $A(0;-2;-2)$, $B(1;-2;-4)$ et $C(-3;-1;2)$

1 pt **1 -** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ puis en déduire que $2x + 2y + z + 6 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2 - On considère la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 23 = 0$

0.5 pt Vérifier que la sphère (S) a pour centre $\Omega(1;0;1)$ et pour rayon $R = 5$

0.25 pt **3 - a)** Vérifier que $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$, est une représentation paramétrque de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

0.5 pt **b)** Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC)

0.75 pt **4 -** Vérifier que $d(\Omega;(ABC)) = 3$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle, de rayon 4, dont on déterminera le centre

Exercice 2 — Session : NORMAL 2018 — 3 Pts

0.75 pt **1 -** Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $2z^2 + 2z + 5 = 0$.

2 - On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, la rotation R de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

0.25 pt **a)** Écrire, sous la forme trigonométrique, le nombre complexe : $d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

b) On considère le point A d'affixe $a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, et le point B l'image du point A par la rotation R. Soit b l'affixe du point B

0.5 pt Montrer que : $b = da$

3 - Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$, et le point C l'image du point B par la translation t et c l'affixe du point C

0.75 pt **a)** Vérifier que $c = b + a$, puis en déduire que $c = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

0.75 pt **b)** Déterminer $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ puis en déduire que le triangle OAC est équilatéral

Exercice 3 — Session : NORMAL 2018 — 3 Pts

Une urne contient 9 boules indiscernables au toucher : *cinq* boules rouges portant les nombres 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 et *quatre* boules blanches portant les nombres 1 ; 2 ; 2 ; 2

On considère l'expérience suivante : On tire, au hasard, et simultanément, *trois* boules de l'urne

Soit les évènements :

A : " Les trois boules tirées sont de même couleur"

B : " Les trois boules tirées portent le même nombre"

C : " Les trois boules tirées sont de même couleur et portent le même nombre"

1.5 pt **1 -** Montrer que : $p(A)=\frac{1}{6}$, $p(B)=\frac{1}{4}$ et $p(C)=\frac{1}{42}$

2 - On répète l'expérience précédente trois fois, avec remise des trois boules tirées dans l'urne après chaque tirage, et on considère la variable aléatoire X qui est égale au nombre de fois de réalisation de l'évènement A

0.5 pt **a)** Déterminer les paramètres de la variable aléatoire X

1 pt **b)** Montrer que : $p(X=1)=\frac{25}{72}$ et calculer $p(X=2)$.

Exercice 4 Session : NORMAL 2018 — 11 Pts

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x)=\mathrm{e}^x-x^2+3x-1$
Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction g

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
g	$-\infty$ ↗	$+\infty$

0.25 pt **1 -** Vérifier que : $g(0)=0$

0.5 pt **2 -** Déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty;0]$ et $[0;+\infty[$

Partie II

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^2-x)\mathrm{e}^{-x}+x$
Et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$(unité : $1cm$)

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que $f(x)=\frac{x^2}{\mathrm{e}^x}-\frac{x}{\mathrm{e}^x}+x$, pour tout x de $\mathbb{R}$, puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

0.75 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$, puis en déduire que la courbe (C) admet une asymptote (D) au voisinage de $+\infty$ d'équation $y=x$

0.5 pt **c)** Vérifier que $f(x)=\frac{x^2-x+x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$, pour tout x de $\mathbb{R}$, puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

0.5 pt **d)** Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$, puis interpréter géométriquement le résultat

0.25 pt **2 - a)** Vérifier que $f(x)-x$ et x^2-x ont le même signe pour tout x de $\mathbb{R}$

0.5 pt **b)** En déduire que (C) est au-dessus de (D) sur chacun des intervalles $]-\infty;0]$ et $[1;+\infty[$, et en dessous de (D) sur l'intervalle $[0;1]$

0.75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x)=g(x)\mathrm{e}^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** En déduire que la fonction f est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$

0.25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f.

0.25 pt **4 - a)** Vérifier que $f"(x)=(x^2-5x+4)\mathrm{e}^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.5 pt **b)** Déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion d'abscisses successives 1 et 4

1 pt **5 -** Construire (D) et (C) dans le même repère $\left(\mathrm{O},\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$(**On prend** $f(4)\approx 4.2$)

0.5 pt **6 - a)** Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto -x^2\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire que $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d} = \frac{2\mathrm{e}-5}{\mathrm{e}}$

0.75 pt **b)** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d} = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$

0.75 pt **c)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par (C) et (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Partie III

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.75 pt **1 -** Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

(On pourra utiliser le résultat de la question $II - 3 - b$))

0.5 pt **2 -** Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

0.75 pt **3 -** En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

FIN