Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2018 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la sphère (S) de centre $\Omega(2,1,2)$ et de rayon 3, et le plan (P) passant par le point $A(-1,0,3)$ et dont $\vec{u}(4,0,-3)$ est un vecteur normal à (P).

0.5 pt **1 -** Montrer que $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

0.5 pt **2 -** Vérifier que $4x-3z+13=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

0.5 pt **3 - a)** Vérifier que $\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1 \\ z = 2-3t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire à plan (P).

b) Déterminer les coordonnées du point H, point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (P).

0.5 pt

0.25 pt **4 - a)** Calculer $d(\Omega,(P))$

0.75 pt **b)** Montrer que le plan (P) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera.

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2018 — 3 Pts

0.75 pt **1 -** Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$.

2 - Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe $a=\sqrt{2}(1-i)$ et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

0.25 pt **a)** Écrire, sous forme trigonométrique, le nombre complexe a .

0.5 pt **b)** Vérifier que l'affixe du point B image du point A par la rotation R est $b=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

0.5 pt **3 - a)** On considère le point C d'affixe $c=1+i$. Montrer que $b^2-c^2=2\sqrt{3}$.

b) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$, et le point D l'image du point B par la translation t.

0.5 pt Montrer que $OD=|b+c|$

0.5 pt **c)** En déduire que $OD\times BC=2\sqrt{3}$

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2018 — 3 Pts

Une urne contient 12 boules, indiscernables au toucher, réparties comme suit : 3 boules rouges portant chacune le nombre 1, 3 boules rouges portant chacune le nombre 2 et 6 boules vertes portant chacune le nombre 2.

On tire, au hasard et simultanément, deux boules de l'urne. Et on considère les événements suivants :

A:" Les deux boules tirées portent le même nombre.".

B:" Les deux boules tirées sont de couleurs différentes ".

C:" Les deux boules tirées portent deux nombres dont la somme est égale à 3".

1.5 pt **1 -** Montrer que : $p(A)=\frac{13}{22}$ et $p(B)=\frac{6}{11}$ et calculer $p(C)$.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que : $p(A \cap B) = \frac{3}{11}$.

0.5 pt **b)** Les événements A et B sont-ils indépendants ? justifier votre réponse.

0.5 pt **3 -** Sachant que l'événement B est réalisé, calculer la probabilité de tirer deux boules qui portent le même nombre.

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2018 — 2 Pts

0.5 pt **1 - a)** Montrer que la fonction $H : x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto (x+1)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** En déduire que $\int_0^1 (x+1)e^x dx = e$

1 pt **2 -** A l'aide d'une intégration par partie, Calculer $\int_0^1 (x^2+2x-1)e^x dx$.

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2018 — 9 Pts

Partie I : Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1 - 2\ln^2 x + 2\ln x$

Voila, ci-contre, le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	
$g(x)$	$\|$ $-\infty$	↗	$+\infty$

0.25 pt **1 -** Calculer $g(1)$.

0.5 pt **2 -** Á partir de ce tableau, déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$.

Partie II : On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$$

Et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

0.5 pt **b)** Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage $+\infty$

0.25 pt **c)** Déterminer la position relative de la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C})$.

0.75 pt **2 -** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

1 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

0.5 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

1 pt **4 -** Construire dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C})$ (unité : 1 cm)

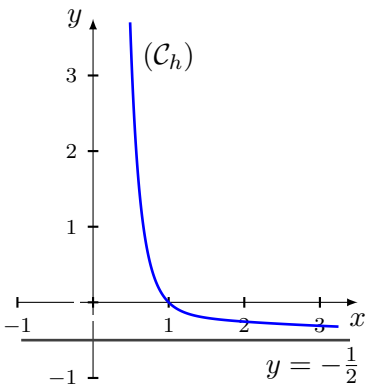
Partie III : On considère la fonction numérique h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = f(x) - x$

0.25 pt **1 -** **a)** Vérifier que $h(1) = 0$

0.75 pt **b)** Sur la figure ci-contre, $(\mathcal{C}_h)$ est la représentation graphique de la fonction h.

Déterminer le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$, puis en déduire que :

$f(x) \leq x$ pour tout x de l'intervalle $[1;+\infty[$



2 - On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \text{e}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.75 pt **a)** Montrer, par récurrence, que : $1 \leq u_n \leq \text{e}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante

$\left(\text{ On pourra utiliser le résultat de la question } \textbf{III- 1- b)} \right)$

0.75 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite .

FIN