ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2019

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère direct $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les point $A(1,2,2); B(3,-1,6) et C(1,1,3)$

1 - a) On a : $\overrightarrow{AB}(3-1,-1-2,6-2), donc\vec{(}2,-3,4)$

Et on a : $\overrightarrow{AC}(1-1,1-2,3-2), donc\vec{(}0,-1,1)$

Alors : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ -3 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$

$=((-3)\times 1-(-1)\times 4)\vec{i}-(2\times 1-0\times 4)\vec{j}+(2\times(-1)-0\times(-3))\vec{k}$

$=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$

b) On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(1,-2,-2)$ est une vecteur normale du plan (ABC).

Donc l'équation cartésienne du plan (ABC)s'écrit :$x-2y-2z+d=0$

puisque $A\in(ABC)$.alors $x_A-2y_A-2z_A+d=0$,donc $(1-2\times 2-2\times 2+d=0)$ donc $d=7$

d'où $(ABC): x-2y-2z+7=0$

2 - On a :$M(x,y,z)\in S\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5-x\\ 1-y\\ 4-z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1-x\\ 1-y\\ 12-z\end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow(5-x)(-1-x)+(1-y)(1-y)+(4-z)(12-z)=0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+(1-y)^2+z^2-16z+43=0$

$\Leftrightarrow(x^2-4x+4)+(y-1)^2+(z^2-16z+64)+43-4-64=0$

$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-1)^2+(z-8)=25$

Alors (S) est la sphère de centre $\Omega(2,1,8)$ et de rayon : $R=\sqrt{25}=5$

3 - a) On a : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|ax_\Omega+by_\Omega+cz_\Omega+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$=\dfrac{1\times 2-2\times 1-2\times 8+7}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=3$

b) On a : $d(\Omega,(ABC))=3$ et $R=5$ donc $d(\Omega,(ABC))<R$

Danc le plan coupe la sphère selon un cercle (Γ) de rayon r

d'où : $r=\sqrt{R^2-d(\Omega,(ABC))^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$

Exercice 2 : (3 pts)

1 - a) Le discriminant Δ de l'équation est : $\Delta=3^2-4\times 3=-3=(\sqrt{3}i)^2$.

Donc l'équation admet deux solution sont :
$z_1=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{2}$ et $z_2=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{2}$

b) On a : $a=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\sqrt{3}(cos(\dfrac{\pi}{6})+isin(\dfrac{\pi}{6}))$

2 - On a : $b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$,alors :

$b^2=(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2(1+i)^2=\dfrac{2}{4}(1+2i-1)=\dfrac{1}{2}(2i)=i$

3 - On a :$h=cos(\dfrac{\pi}{12})+isin(\dfrac{\pi}{12})$ alors :

$h^4+1=cos(\dfrac{4\pi}{12})+isin(\dfrac{4\pi}{12})+1=cos(\dfrac{\pi}{3})+isin(\dfrac{\pi}{12})+1=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1=\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=a$

4 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o;\vec{u};\vec{v})$,on considère le point B d'affixe b et R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Puisque le point $C(c)$est l'image du point $B(b)$ par la rotation R alors :

$z_c-z_o=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B-z_O)$

$\Leftrightarrow c=(cos(\frac{\pi}{2})+isin(\frac{\pi}{2}))b$

$\Leftrightarrow c=(0+i)b$

$\Leftrightarrow c=ib$

b) on a :$c=ib$,donc $\dfrac{c}{b}=i$

alors $\dfrac{z_c-z_o}{z_b-z_o}=[1;\frac{\pi}{2}]$,donc $|\dfrac{z_c-z_o}{z_b-z_o}|=1 et arg(\dfrac{z_c-z_o}{z_b-z_o})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

donc $OB=OC et(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

alors le triangle OBC est un triangle rectangle et isocèle en O

Exercice 3 : (3 pts)

1 - On a : $card(\Omega)=6^3=216; card(A)=1^3+2^3+3^3=36$

et $cad(B)=4^3=64$

Donc $p(A)=\dfrac{card(A)}{card(\Omega)}=\dfrac{36}{216}=\dfrac{1}{6}; p(A)=\dfrac{card(B)}{card(\Omega)}=\dfrac{64}{216}=\dfrac{8}{27}$

2 - On a : $card(C)=3\times(2^2\times 4^1)=48$, donc : $p(C)=\dfrac{card(C)}{card(\Omega)}=\dfrac{48}{216}=\dfrac{2}{9}$

Exercice 4 : (11 pts)

Partie I

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$f(x) = 2 + 8(\frac{x-2}{x})^2 e^{x-4}$
et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Unité $1cm$)

1 - a) On a : $lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x-2}{x} = 1$ et $lim_{x\longrightarrow-\infty}e^{x-4} = 0$ donc
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 + 8 \times 1^2 \times 0 = 2$
Donc la droite $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage $-\infty$

b) On a $\lim_{x\to0}(\frac{x-2}{x})^2 = +\infty$,
$lim_{x\to0}e^{x-4} = e^{-4}$, donc :
$\lim_{x\to0} f(x) = 2 + 8 \times (+\infty) \times e^{-4} = +\infty$
donc la droite $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

2 - a) On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{x-4} = +\infty$,$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2+8\times1^2\times(+\infty) = +\infty$

b) On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et on a :
$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2+8(\frac{x-2}{x})^2e^{x-4}}{x}$
$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} + 8(\frac{x-2}{x})^2\frac{e^{x-4}}{x}$
$0+8\times1\times(+\infty) = +\infty$ Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3 - a) la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, alors pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a :
$f' = 0 + 8 \times 2(\frac{x-(x-2)}{x^2})(\frac{x-2}{x})e^{x-4} + 8(\frac{x-2}{x})^2e^{x-4}$
$= 8 \times 2 \times (\frac{2}{x^2})(\frac{x-2}{x}e^{x-4} + 8\frac{(x-2)^2}{x^2}e^{x-4}$
$= \frac{8(x-2)(2\times2+x(x-2))e^{x-4})}{x^3}$
$= \frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4})}{x^3}$

b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :$x^2-2x+4 = (x-1)^2+3, or(x-1)^2 \geq 0$
alors $(x-1)^2+3 > 0$, d'où : $x^2-2x+4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) On a pour tout x de $\mathbb{R}, x^2-2x+4 > 0$ et $e^{x-4} > 0, alors 8(x^2-2x+4)e^{x-4} > 0$, donc le signe de f' est le même que celui de $\frac{x-2}{x^3}$.

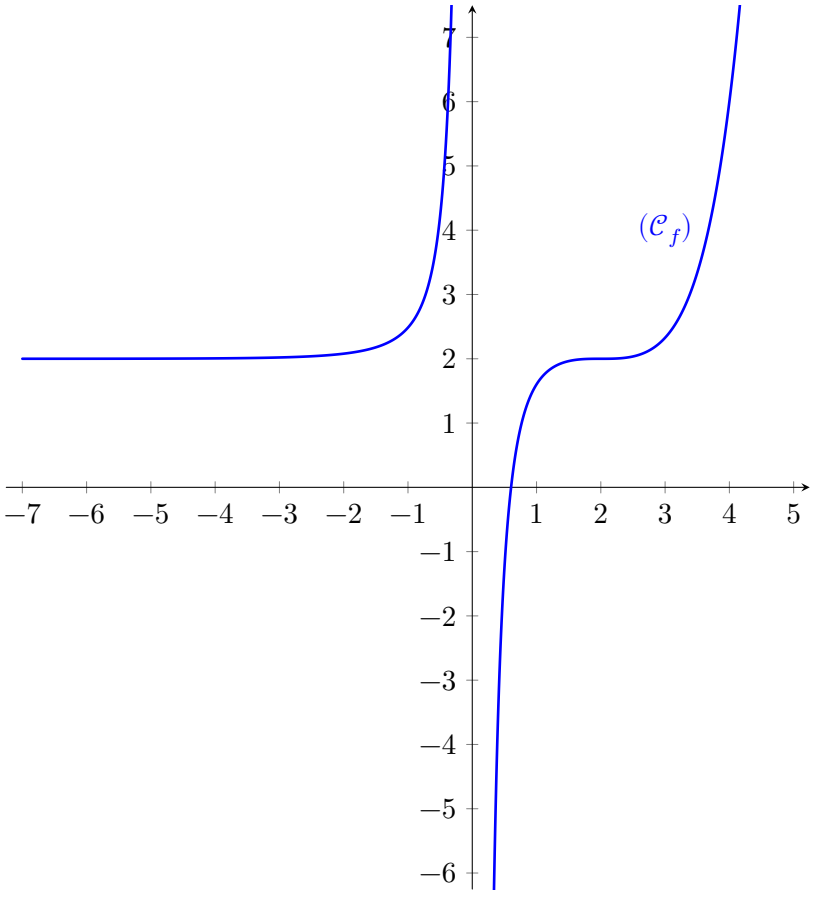
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-2}{x^3}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Donc f est strictement décroissante sur $]0;2]$, et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty;0[et[2;+\infty$.

d) Tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
f		$+\infty$ ↗	‖	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$	

4 - La courbe (C)



5 - a) On a H est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, alors H est dérivable sur $[2;4]$,alors :

$H'(x) = \frac{-1}{x^2}e^{x-4} + \frac{1}{x}e^{x-4} = (\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x})e^{x-4}$

$\frac{x-1}{x^2}e^{x-4} = h(x)$

Donc la fonction H est une primitive de la fonction f sur $[2;4]$

b) Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, on a :

$f(x) = 2 + 8(\frac{x-2}{x})^2e^{x-4} = 2 + 8(\frac{x^2-4x+4}{x^2})e^{x-4}$

$2 + 8(1 - 4(\frac{x-1}{x^2}))e^{x-4} = 2 + 8e^{x-4} - 32(\frac{x-1}{x^2})e^{x-4}$

c) On a : $\int_2^4 e^{x-4}dx = [e^{x-4}]_2^4 = e^0 - e^{-2} = 1 - \frac{1}{e^2} = \frac{e^2-1}{e^2}$

d) L'aire du domaine plan limité par (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$ est :

$A = \int_2^4 |f(x)|dx = \int_2^4 f(x)dx$; car $\forall x \in \mathbb{R} f(x) \geqslant 0$.

$A = \int_2^4 2 + 8e^{x-4} - 32(\frac{x-1}{x^2})e^{x-4}dx = 2\int_2^4 dx + 8\int_2^4 e^{x-4}dx - 32\int_2^4 h(x)dx$

$A = 2[x]_2^4 + 8(\frac{e^2-1}{e^2}) - 32[H(x)]_2^4$

$A = 2(4-2) + 8(\frac{e^2-1}{e^2}) - 32(\frac{1}{4}e^{4-4} - \frac{1}{2}e^{2-4})$

$A = 4 + 8(\frac{e^2-1}{e^2}) - 32(\frac{1}{4} - \frac{1}{2e^2})$

$A = 4 + 8(\frac{e^2-1}{e^2}) - 32(\frac{e^2-2}{4e^2})$

$A = 4 + 8(\frac{e^2-1}{e^2}) - 8(\frac{e^2-2}{e^2})$

$A = 4 + 8(\frac{e^2-1-e^2+2}{e^2})$

$A = 4 + \frac{8}{e^2}$

Partie II

1 - On considère la fonction numérique g définie sur $[2;4]$ par :

$g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2$.

a) On a : $g(4) = 8(4-2)e^{4-4} - 4^2 = 16 - 16 = 0$

b) Pour tout x de $[2;4]$, on a :

$g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2 = -(x^2 - 8x - 16)e^{x-4} - x^2 + x^2e^{x-4}$

$= -(x-4)^2e^{x-4} + x^2(e^{x-4} - 1)$

c) Si $2 \leqslant x \leqslant 4$, alors $2 - 4 \leqslant x - 4 \leqslant 4 - 4$, alors $-2 \leqslant x - 4 \leqslant 0$ alors $e^{-2} \leqslant e^{x-4} \leqslant e^0$, donc $e^{x-4} \leqslant 1$, d'où $e^{x-4} - 1 \leqslant 0, \forall x \in [2;4]$

Pour tout x de $[2;4]$, on a : $e^{x-4} - 1 > 0$ et $e^{x-4} > 0$ donc $-(x-1)^2e^{x-4} \leqslant 0$ et $x^2(e^{x-4} - 1) \leqslant 0$, donc $-(x-1)^2e^{x-4} + x^2(e^{x-4} - 1) \leqslant 0$, d'où $g(x) \geqslant 0, \forall x \in [2;4]$

2 - a) Pour tout x de $[2;4]$, on a :

$f(x) - x = 2 + 8(\frac{x-2}{x})^2e^{x-4} - x$

$$= (\frac{x-2}{x^2})(\frac{2x^2}{x-2} + 8(x-2)e^{x-4} - \frac{x^3}{x-2})$$
$$= (\frac{x-2}{x^2})(8(x-2)e^{x-4} - \frac{x^3-2x^2}{x-2})$$
$$= (\frac{x-2}{x^2})(8(x-2)e^{x-4} - \frac{x^2(x-2)}{x-2})$$
$$= (\frac{x-2}{x^2})(8(x-2)e^{x-4} - x^2)$$
$$= (\frac{x-2}{x^2})g(x).$$

b) Pour x de $[2;4]$, on a $x-2 \geqslant 0$; donc $\frac{x-2}{x^2} \geqslant 0$, or $g(x) \leqslant 0$, alors $\frac{x-2}{x^2}g(x) \leqslant 0$ donc $f(x) - x \leqslant 0$, d'où :$f(x) \leqslant x; \forall x \in [2;4]$

3 - Soit $(Un)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = f(U_n) \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Pour $n = 0$, on a :$U_0 = 3$, donc $2 \leqslant U_0 \leqslant 4$

Supposons que : $2 \leqslant U_n \leqslant 4$, et en montrons que :$2 \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$.

On a : $2 \leqslant U_n \leqslant 4$, donc $2 \leqslant f(U_n) \leqslant 4$ car f et continue et croissante sur $[2;4]$. donc $2 \leqslant U_{n+1} \leqslant 4$, car $f(2) = 2$ et $f(4) = 4$.

D'après le principe du raisonnement par récurrence :

$2 \leqslant U_n \leqslant 4 \ \forall n \in [2;4]$.

b) d'après la question 2)b), on a :$\forall x \in [2;4] : f(x) = -x = 0$, et puisque : $U_n \in [2;4]$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$(f(U_n) - U_n \leqslant 0 \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n \Leftrightarrow U_{n+1} \leqslant U_n$

donc la suite (U_n) est décroissante. et puisque la suite (U_n) est décroissante et minoré par 2 alors (U_n) est convergente

c) La fonction f est continue et croissante sur $[2;4]$, donc $f([2;4]) = [f(2); f(4)] = [2;4]$ alors $f([2;4]) \subset [2;4]$, or $U_0 \in [2;4]$, et puisque la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc la limite de suite (U_n) est le nombre réel l la solution $f(l) = l$.

$f(l) = l \Leftrightarrow f(l) - l = 0$
$\Leftrightarrow (\frac{l-2}{l^2})g(l) = 0$
$\Leftrightarrow l - 2 = 0$ ou $g(l) = 0$
$\Leftrightarrow l = 2$ ou $l = 4$

puisque la suite (U_n) est décroissante, donc pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $U_n < U_0$ donc $U_n < 3$

Donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = 2$