Exercice 1 — Session : NORMAL 2019 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1,-1,-1)$, $B(0,-2,1)$ et $C(1,-2,0)$.

0,75 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

0,5 pt **b)** En déduire que $x + y + z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2 - Soit (S) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$

0,75 pt Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega(2,-1,1)$ et que son rayon est $R = \sqrt{5}$.

0,5 pt **3 - a)** Calculer $d(\Omega,(ABC))$ la distance du point Ω au plan (ABC).

0,5 pt **b)** En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) (la détermination du centre et du rayon de (Γ) n'est pas demandée)

Exercice 2 — Session : NORMAL 2019 — 3 Pts

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 4 = 0$

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 - i\sqrt{3}$, $b = 2 + 2i$, $c = \sqrt{3} + i$ et $d = -2 + 2\sqrt{3}$.

0,5 pt **a)** Vérifier que $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$.

0,25 pt **b)** En déduire que les points A, C et D sont alignés.

3 - On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{-\pi}{3}$

0,5 pt Vérifier que $z' = \dfrac{1}{2}az$

4 - Soient H l'image du point B par la rotation R, h son affixe et P le point d'affixe p tel que $p = a - c$.

0,5 pt **a)** Vérifier que $h = ip$

0,5 pt **b)** Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O.

Exercice 3 — Session : NORMAL 2019 — 3 Pts

Une urne contient dix boules : trois boules vertes, six boules rouges et une boule noir indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

A : ≪ **Obtenir trois boules vertes** ≫

B : ≪ **Obtenir trois boules de même couleur** ≫

C : ≪ **Obtenir au moins deux boules de même couleur** ≫

2 pt **1 -** Montrer que $P(A) = \dfrac{1}{120}$ et $P(B) = \dfrac{7}{40}$

1pt **2 -** Calculer $p(C)$.

Exercice 4 — Session : NORMAL 2019 — 11 Pts

Première partie :

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité:1 cm)

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, puis interpréter le résultat géométriquement.

0,25 pt **2 - a)** Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$

0,5 pt **b)** En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

0,5 pt **c)** Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

puis en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

0,75 pt **d)** Montrer que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y=x$

0,5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout x de $]0,1]$: $(x-1)+\ln x\leq 0$

et pour tout x de $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x\geq 0$

1 pt **b)** Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$

0,5 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f

0,5 pt **4 - a)** Montrer que $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0,+\infty[$

0,5 pt **b)** En déduire que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

0,5 pt **5 - a)** Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$ et déduire la position relative de (C) et (Δ)

1pt **b)** Construire (Δ) et (C) dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

0,5 pt **6 - a)** Montrer que la fonction $H: x\mapsto x\ln x-x$ est une fonction primitive de la fonction $h: x\mapsto\ln x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

0,75 pt **b)** A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e(\ln x)^2\,dx=e-2$

0,5 pt **c)** Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par (C) et (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Deuxième partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **1 - a)** Montrer par récurrence que $1\leq u_n\leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est croissante.

0,5 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente.

0,75 pt **2 -** Calculer la limite de la suite (u_n)

FIN