Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2019 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1,2,2)$, $B(3,-1,6)$, et $C(1,1,3)$.

0,75 pt **1 - a)** Vérifier que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

0,5 pt **b)** En déduire que $x - 2y - 2z + 7 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

0,75 pt **2 -** Soient les points $E(5,1,4)$ et $F(-1,1,12)$ et (S) l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 0$. Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(2,1,8)$ et de rayon $R = 5$

0,5 pt **3 - a)** Calculer $d(\Omega,(ABC))$ distance du point Ω au plan (ABC).

0,5 pt **b)** En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $r = 4$.

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2019 — 3 Pts

0,75 pt **1 - a)** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - 3z + 3 = 0$

0,5 pt **b)** On pose $a = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, écrire a sous forme trigonométrique.

0,5 pt **2 -** On considère le nombre complexe $b = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, vérifier que $b^2 = i$

0,5 pt **3 -** On pose $h = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$, montrer que $h^4 + 1 = a$

4 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le point B d'affixe b et R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

0,5 pt **a)** Soit c l'affixe du point C image du point B par la rotation R. Montrer que $c = ib$.

0,25 pt **b)** En déduire la nature du triangle OBC.

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2019 — 3 Pts

Une urne contient une boule rouge, deux boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et avec remise trois boules de l'urne.

Soient les événements suivants :

A : "les trois boules tirées sont de même couleur "

B : "il n'y a aucune boule blanche parmi les boules tirées "

C : "il y a exactement deux boules blanches parmi les boules tirées "

2 pts **1 -** Monter que $p(A) = \dfrac{1}{6}$ et $p(B) = \dfrac{8}{27}$

1 pt **2 -** Calculer $p(C)$.

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2019 — 11 Pts

Partie I

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = 2 + 8\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$(unité : 1 cm)

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et interpréter le résultat géométriquement.

0.5 pt **b)** Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

0.5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

0.5 pt

0.75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \dfrac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

0.25 pt **b)** Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2-2x+4>0$.

c) Monter que la fonction f est strictement décroissante sur $]0,2]$ et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $[2,+\infty[$.

0.75 pt

0.5 pt **d)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

1 pt **4 -** Construire la courbe (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

5 - a) Vérifier que la fonction $H : x \mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur $[2,4]$.

0.5 pt

0.25 pt **b)** Vérifier que $f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32\dfrac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

0.5 pt **c)** Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^4 \mathrm{e}^{x-4}\mathrm{d}x$

d) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $x=4$.

0.75 pt

Partie II

1 - On considère la fonction numérique g définie sur $[2,4]$ par $g(x) = 8(x-2)e^{x-4} - x^2$

0.25 pt **a)** Calculer $g(4)$

0.5 pt **b)** Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$, $g(x) = -(x-4)^2e^{x-4} + x^2(e^{x-4}-1)$

c) Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$: $e^{x-4}-1 \leq 0$ puis en déduire que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$: $g(x) \leq 0$

0.5 pt

0.5 pt **2 - a)** Vérifier que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$, $f(x) - x = \left(\dfrac{x-2}{x^2}\right)g(x)$

0.25 pt **b)** En déduire que pour tout x de l'intervalle $[2,4]$, $f(x) \leq x$.

3 - Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **a)** Monter par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **b)** Déterminer la monotonie de la suite (u_n) et en déduire qu'elle est convergente.

0.75 pt **c)** Calculer la limite de la suite (u_n).

FIN