ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2020

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (2 pts)

1 - Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$:

0.5 pt

Pour $n = 0$ on a $u_0 = 1 < 2$, Donc proposition vraie pour $n = 0$.

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} < 2$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 2 \Rightarrow 2u_n - 5 < -1$ Donc $\frac{1}{2u_n-5} > -1$(Ce nombre est négatif)

On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 2 \Rightarrow 3u_n - 8 < -2$

$\forall n \in \mathbb{N}, -(3u_n - 8) > 2$

Donc $\frac{-(3u_n-8)}{2u_n-5} > -2$ Finalement $\frac{(3u_n-8)}{2u_n-5} < 2$ donc $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} < 2$

D'après le principe de récurrence on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$

2 - a) Montrons que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 : On calcule :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} - 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\ &= \frac{\frac{3u_n-8}{2u_n-5} - 3}{\frac{3u_n-8}{2u_n-5} - 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\ &= \frac{-3u_n - 7}{-u_n + 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\ &= \frac{2u_n - 4}{u_n - 2} = 2 \end{aligned}$$

Donc la suite v_n est arithmétique de raison 2.

0.75 pt

b) l'expression du terme générale de v_n : $v_n = v_0 + \times n = 2 + 2n$

Déduisons l'expression du terme générale de u_n :

on a $\frac{u_n - 3}{u_n - 2} = \frac{u_n - 2 - 1}{u_n - 2} = 1 - \frac{1}{u_n - 2}$

Donc : $\dfrac{1}{u_n-2}=1-v_n \quad \Rightarrow \quad u_n-2=\dfrac{1}{1-v_n}$

$\Rightarrow u_n=2+\dfrac{1}{1-v_n}=2+\dfrac{1}{1-(2+2n)}=2-\dfrac{1}{1+2n}=\dfrac{1+4n}{1+2n}$

D'où : $u_n=\dfrac{1+4n}{1+2n}$

0.25 pt **c)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+4n}{1+2n}=\dfrac{4}{2}=2$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$

Exercice 2 : (5 pts)

1 - Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-\sqrt{2}z+1=0$

On calcule $\Delta=b^2-4ac=(-\sqrt{2})^2-4\times1\times1=2-4=-2\leq0$

0.75 pt Donc : l'équation admet deux solutions imaginaires conjuguées :

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2=\overline{z_1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

2 - On pose $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

a) Ecrivons a sous forme trigonométrique :

0.75 pt On a : $|a|=1$ Donc $a=1\left(\cos(\frac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4})\right)$

Déduisons que a^{2020} est un nombre réel :

On utilise la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} a^{2020}&=1^{2020}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2020} \\ &=1\left(\cos\left(\frac{2020\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(2020\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &=\cos(505\pi)+\mathrm{i}\sin(505\pi) \\ &=\cos(505\pi)=-1\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc : a^{2020} est un nombre réel

b) Prouvons que : $b^2=a$:

on a $b^2=\left(\cos(\frac{\pi}{8})+\mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{8})\right)^2$

0.5 pt (Formule de Moivre) $\Rightarrow \quad b^2=\left(\cos(\frac{2\pi}{8})+\mathrm{i}\sin(\frac{2\pi}{8})\right)=\left(\cos(\frac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4})\right)=a$

Donc : $b^2=a$

3 - a) Vérifions que $z'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}z=bz$:

0.25 pt On a $z'-\omega=(z-\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ Avec $\omega=0$

Donc $z' = e^{i\frac{\pi}{8}} z = bz$

b) - Déterminons l'image de C par la rotation R :

L'image de C par la rotation R est $z' = bc = b$

0.5 pt Donc l'image de C par R est B.

- Montrons que A est l'image de B par R :

On a l'image de B par R est $z' = bb = b^2 = a$ (D'après question 2-b)).

0.5 pt Donc A est l'image de B par R.

4 - a) Montrons que $|a-b| = |b-c|$ et déduisons la natrue du tiangle ABC :

on a :

$$\begin{aligned} |a-b| &= |b(b-1)| \\ &= |b||(b-1)| \\ &= |b-1| \\ &= |b-c| \quad \text{(Puisque c=1)} \end{aligned}$$

Donc : $|a-b| = |b-c|$

0.75 pt Alors, le triangle ABC est un triangle isocèle en B.

b) Déterminons une mesure de l'angle$(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$:

On a :

$$\begin{aligned} \arg((\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})) &= \arg(\frac{a-b}{b-c}) \\ &= \arg(\frac{b(b-1)}{b-1}) \\ &= \arg(b) = \frac{\pi}{8}[2\pi] \end{aligned}$$

Donc $\arg(b) = \frac{\pi}{8}[2\pi]$

5 - a) Vérifions que l'affixe de D est b^2+1 :

On a $z' = z + u$ avec u l'affixe du vecteur $\vec{u}$

Donc $z' = z + 1$

Ceci implique que $d = a + 1 = b^2 + 1$

0.25 pt Alors : $d = b^2 + 1$

b) Montrons que $\frac{b^2+1}{b} = b + \overline{b}$ et déduisons que les points D et O et B sont alignés :

On a : $\frac{b^2+1}{b} = b + \frac{1}{b} = b + \frac{\overline{b}}{b\overline{b}} = b + \overline{b}$

D'où : $\frac{b^2+1}{b} = b + \overline{b}$

Puisque : $\dfrac{b^2+1-0}{b-0} = \dfrac{d-0}{b-0} = b+\overline{b} = 2\Re(b) \in \mathbb{R}$

0.75 pt

Donc les points D et O et B sont alignés.

Exercice 3 : (4 pts)

1 - a) Motrons que $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x-1)^2+2}{\mathrm{e}^x}$:

On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) &= (\mathrm{e}^x - 2x + 2 - 3\mathrm{e}^{-x})' \\ &= \mathrm{e}^x - 2 + 3\mathrm{e}^{-x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x + 3}{\mathrm{e}^x} \\ &= \frac{(\mathrm{e}^x)^2 - 2\mathrm{e}^x + 1 + 2}{\mathrm{e}^x}\end{aligned}$$

0.5 pt

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x-1)^2+2}{\mathrm{e}^x}$

b) Posons le tableau de variation de la fonction u :

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x-1)^2+2}{\mathrm{e}^x} > 0$

- Tableau de variation

x	$-\infty$		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	
$u(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

0.25 pt

c) Déduisons le signe de la fonction u :

- Pour $x \in]-\infty;0]$, $x \leq 0$;

Puisque u est croissante sur $]-\infty;0]$ $\iff$ $u(x) \leq u(0) = 0$

Donc :

$$\forall x \in]-\infty;0]\, x \leq 0\ ,\ u(x) \leq 0$$

- Pour $x \in [0;+\infty[$, $x \geq 0$;

Puisque u est croissante sur $[0;+\infty[$ $\iff$ $u(x) \geq u(0) = 0$

Donc :

$$\forall x \in [0;+\infty[\, , x \geq 0\ ,\ u(x) \geq 0$$

- Tableau de signe de la fonction u :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	

0.5 pt

2 - a) Vérifions que : $V(x) = \mathrm{e}^x u(x)$:

On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ V(x) &= \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - 3\\ &= \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 2x + 2 - 3\mathrm{e}^{-x}\right)\\ &= \mathrm{e}^x u(x)\end{aligned}$$

D'où : $V(x) = \mathrm{e}^x u(x)$

0.5 pt

b) Duiduisons le signe de la fonction V sur $\mathbb{R}$:

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \mathrm{e}^x > x$, donc le signe de $V(x)$ est le même que celui de $u(x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$V(x)$		$-$	0	$+$	

0.5 pt

3 - a) Montrons que la fonction W est une prémitive de la fonction V sur $\mathbb{R}$:

- On calcul la dérivé de $W(x)$

$$\begin{aligned}W'(x) &= \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + (4-2x)\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - 3x\right)'\\ &= \frac{1}{2}\times 2\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^(x) - 2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x - 3\\ &= \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x - 3 = V(x)\end{aligned}$$

D'où : $W(x)$ est une primitive de $V(x)$ sur $\mathbb{R}$

0.5 pt

b) Calculons l'intérgrale : $\displaystyle\int_0^2 V(x)\mathrm{d}x$:

On a :

$$\begin{aligned}\int_0^2 V(x)\mathrm{d}x &= [W(x)]_0^2\\ &= W(2) - W(0)\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^4 + (4-4)\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e}^2 - 6 - \left(\frac{1}{2} + 4\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^4 - 21}{2}\end{aligned}$$

Donc : $\int_0^2 V(x)\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{e}^4 - 21}{2}$

0.5 pt

c) Montrons que $\dfrac{9}{2}$ est le minimum absolu de la fonction W sur $\mathbb{R}$:

On a la dérivé de la fonction W s'annule en $x = 0$ $(V(0) = 0)$

Donc la fonction $W(x)$ admet un extremum en point $x = 0$.

Calculons $W''(x)$:

On a : $W''(x) = (W'(x))' = V'(x) = \mathrm{e}^x u(x) + \mathrm{e}^x u'(x)$

Donc : $W''(x)$ est positif en $x = 0$

0.75 pt

D'où le point $(0, W(0) = \frac{9}{2})$ est le minimum absolu de la fonction W sur $\mathbb{R}$

Exercice 4 : (9 pts)

Partie I

1 - Montrons que : $\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ g'(x) < 0$:

On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ g'(x) &= (\mathrm{e}^{1-x} + \frac{1}{x} - 2)' \\ &= -\mathrm{e}^{1-x} - \frac{1}{x^2} \\ &= -\frac{x^2\mathrm{e}^{1-x} + 1}{x^2}\end{aligned}$$

et $\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ x^2\mathrm{e}^{1-x} + 1 > 0$ et $x^2 > 0$, donc $-\dfrac{x^2\mathrm{e}^{1-x} + 1}{x^2} < 0$

Alors : $\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ g'(x) < 0$

0.5 pt

2 - Déduisons le tableau de signe de $g(x)$:

0.5 pt

- Pour $x \in [0;1]\ ,\ x \leq 1$

Puisque g est décroissante sur $[0;1] \iff g(x) \geq g(1) = 0$

Donc : $\forall x \in [0;1]\,,\ g(x) \geq 0$

- Pour $x \in [1;+\infty[\ ,\ x \geq 1$

Puisque g est décroissante sur $[1;+\infty[\iff g(x) \leq g(1) = 0$

Donc : $\forall x \in [1;+\infty[\ ,\ g(x) \leq 0$

- Tableau de signe :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

0.5 pt

PARTIE II

1 - Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1-x)\mathrm{e}^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln(x) = +\infty$

$(\text{car } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty)$

Donc (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

2 - a) Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)\mathrm{e}^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln(x)$

On pose $t = 1 - x \iff x = 1 - t$ donc si $x \to +\infty$ alors $x \to -\infty$

Alors :

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to-\infty} t\mathrm{e}^t - (1-t)^2 + 5(1-t) - 3 - 2\ln(1-t)\\
&= \lim_{t\to-\infty} t\mathrm{e}^t + (1-t)^2\left(-1 + \frac{5}{1-t} - \frac{3}{(1-t)^2} - \frac{\ln(1-t)}{(1-t)^2}\right)\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

0.5 pt $(\text{Car } \lim\limits_{t\to-\infty} t\mathrm{e}^t = 0 \text{et } \lim\limits_{t\to-\infty} \frac{5}{1-t} - \frac{3}{(1-t)^2} - \frac{\ln(1-t)}{(1-t)^2} = 0)$

b) Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$:

0.5 pt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-x)\mathrm{e}^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln(x)}{x}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-x)\mathrm{e}^{1-x}}{x} - \frac{x^2}{x} + \frac{5x-3}{x} - 2\frac{\ln(x)}{x}\\
&= \lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{x} - 1)\mathrm{e}^{1-x} - x + 5 - \frac{3}{x} - 2\frac{\ln(x)}{x} = -\infty
\end{aligned}$$

$(\text{car } \lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1}{x} - 1)\mathrm{e}^{1-x} = 0 \text{ , } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ , } \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{3}{x} = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} -x + 5 = -\infty)$

Interprétation :

(C) admet une branche parabolique de direction les axes des ordonnées au voisinage de $+\infty$

0.25 pt

1 pt **3 - a)** Calcul de la dérivé : $\forall x \in]0;+\infty[$,

$$f'(x) = \left((1-x)\mathrm{e}^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln(x)\right)'$$
$$= -\mathrm{e}^{1-x} - (1-x)\mathrm{e}^{1-x} - 2x + 5 - \frac{2}{x} = -2\mathrm{e}^{1-x} + x\mathrm{e}^{1-x} - 2x + 1 + 4 - \frac{2}{x}$$
$$= -2\left(\mathrm{e}^{1-x} + \frac{1}{x} - 2\right) + x\left(\mathrm{e}^{1-x} + \frac{1}{x} - 2\right)$$
$$= (x-2)\left(\mathrm{e}^{1-x} + \frac{1}{x} - 2\right)$$

Donc : $\forall x \in]0;+\infty[\ ,\ f'(x) = (x-2)g(x)$

b) Etudions la monotonie de f :

Puisque le signe de g est déterminé (d'après la question I-2) donc le signe de $f'(x)$ est donnée par le tableau suivant **0.75 pt**

x	0		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$		$-$	
$f'(x) = (x-2)g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

D'après le tableau précédent sur les intervalles $]0;1]$ et $[2;\infty[$, on a $f'(x) < 0$ donc la fonction f est décroissante sur les intervalles $]0;1]$ et $[2;\infty[$. et dans l'intervalle $[1;2]$ la dérivé f' est positive , donc f est croissante sur $[1;2]$. **0.25 pt**

c) tableau de variation

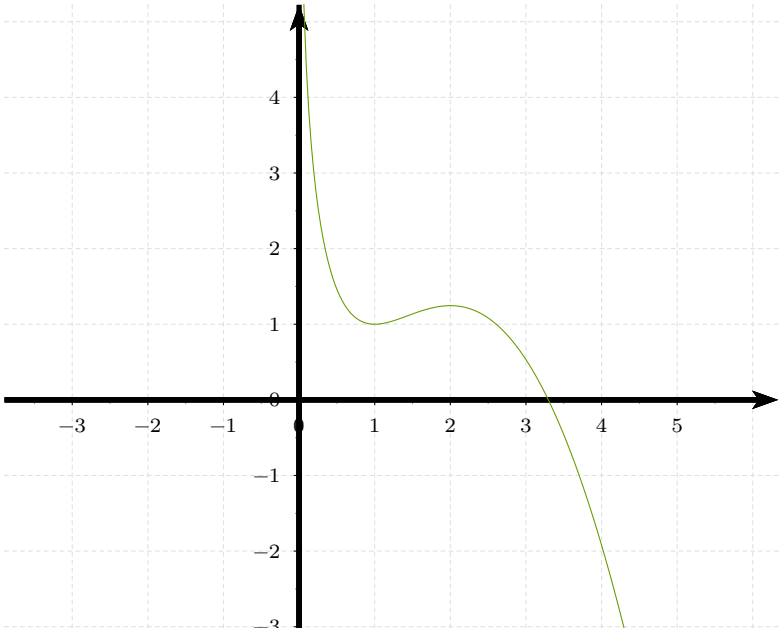
x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	1.25	↘	$-\infty$

4 - La fonction f est une fonction continue sur $]0;+\infty[$ et en particulier $]3;4[$ et la fonction f est strictement décroissante sur $]3;4[$ et le $f(3) \times f(4) < 0$ **0.5 pt**

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :

l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]3;4[$.

5 - Construction de la figure **1 pt**



Partie III

1 - a) dans l'intervalle $[1;2]$ la fonction admet un maximum pour $x = 0$

0.5 pt Donc $h(x) \leq 0 \iff f(x) - x \leq 0$

$$\boxed{\forall x \in [1;2] \ , \ f(x) \leq x}$$

b) On a la fonction h est continue et strictement décroissante sur $[1;2]$

et comme $0 \in h([1;2])$; donc l'équation $h(x) = 0$ admet unique solution dans l'intervalle $[1;2]$

Or $h(1) = 0$ alors 1 est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$ dans l'intervalle $[1;2]$

0.25 pt $\boxed{\text{Donc l'équation } f(x) = x \text{ admet 1 comme une unique solution dans l'intervalle } [1;2]}$.

0.75 pt **2 - a)** a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 1 \leq u_n \leq 2$

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ donc $1 \leq u_0 \leq 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $1 \leq u_n \leq 2$, montrons que : $1 \leq u_{n+1} \leq 2$. On a

$$1 \leq u_n \leq 2 \underbrace{\Longrightarrow}_{f \text{ est } \nearrow \text{ sur } [1,2]} f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$$

et comme $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [1,2]$ alors $f(2) \leq 2$

Donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

$$\boxed{\text{D'où : } \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2}$$

0.5 pt **b)** Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :

On a pour tout $x \in [1,2], f(x) \leq x$

et comme $u_n \in [1,2]$, donc $f(u_n) \leq u_n$

D'où

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} \leq u_n$$

Ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) Déduisons que la suite est convergente

0.75 pt

On a : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. et comme elle est minorée par 1 , alors elle est convergente.

Calculons $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

On a :

i. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n)$

ii. $u_0 \in [1, 2]$.

iii. f est continue sur $[1, 2]$

iv. $f([1, 2]) \subset [1, 2]$

v. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

Donc sa limite ℓ $(\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell)$ est une solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[1, 2]$

Puisque 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[1, 2]$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$