Exercice 1 — Session : NORMAL 2020 — 4 Pts

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,25 pt **1 -** Calculer u_1.

0,5 pt **2 -** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$

1 pt **3 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$,

puis en déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

0,5 pt **b)** Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4 - On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,75 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

1 pt **b)** Déterminer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 2 — Session : NORMAL 2020 — 5 Pts

1 - Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$$

0,5 pt **a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = -4\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2$.

1 pt **b)** En déduire les solutions de l'equation (E) .

2 - Soient les nombres complexes :

$$a = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) \quad , \quad b = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

0,75 pt **a)** Vérifier que $b\bar{c} = a$, puis en déduire que $ac = 4b$.

0,5 pt **b)** Ecrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique..

0,5 pt **c)** En déduire que : $a = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

3 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, On considère les points B, C et D d'affixes respectives b, c et d telle que $d = a^4$.

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$

0,5 pt **a)** Vérifier que : $z' = \frac{1}{4}az$.

0,25 pt **b)** Déterminer l'image du point C par la rotation R .

0,25 pt **c)** Déterminer la nature du triangle OBC.

0,75 pt **d)** Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés .

Exercice 3 — Session : NORMAL 2020 — 4 Pts

On considère la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$

0,5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$.

0,5 pt **b)** Montrer que g est croissante sur $[1; +\infty[$.

0,5 pt **c)** En déduire que pour tout x de $[1;+\infty[$, $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$ (Remarquer que $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$).

1 pt **d)** Montrer que pour tout x de $[1;+\infty[$, $0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$ et en déduire $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$.

0,75 pt **2 - a)** Montrer que la fonction : $G : x \mapsto x\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x\right)$ est une primitive de g sur $]0;+\infty[$.

0,75 pt **b)** Calculer l'intégrale $\int_1^4 g(x)dx$.

Exercice 4 — Session : NORMAL 2020 — 7 Pts

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2} - 4\right)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2 cm).

0,5 pt **1 -** Montrer que : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

0,5 pt **2 - a)** Démontrer que la droite (Δ) d'équation : $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

b) Résoudre l'équation $e^{x-2} - 4 = 0$ puis montrer que la courbe (C) est au dessus de (Δ) **0,75 pt** sur l'intervalle $]-\infty; 2+\ln 4]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2+\ln 4;+\infty[$.

0,5 pt **3 -** Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0,5 pt **4 - a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ $f'(x) = -\left(e^{x-2} - 1\right)^2$.

0,25 pt **b)** Dresser le tableau de variations de la fonction f.

0,75 pt **5 -** Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que $A(2,2)$ est un point d'inflexion de (C).

0,5 pt **6 -** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $2+\ln 3 < \alpha < 2+\ln 4$.

1 pt **7 -** Construire (Δ) et (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ci-dessous (on prend $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 3 \simeq 1,1$).

0,5 pt **8 - a)** Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

0,75 pt **b)** Construire dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1} (Remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice du repère).

0,5 pt **c)** Calculer $\left(f^{-1}\right)'(2-\ln 3)$ (Remarquer que $f^{-1}(2-\ln 3) = 2+\ln 3$).

FIN