Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2020 — 2 Pts

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 8}{2u_n - 5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 -** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n < 2$.

2 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 2}$.

0,5 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2.

0,75 pt **b)** Exprimer v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n , pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,25 pt **c)** Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2020 — 5 Pts

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.

2 - On pose $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

0,75 pt **a)** Ecrire a sous forme trigonométrique et en déduire que a^{2020} est un nombre réel.

0,5 pt **b)** Soit le nombre complexe $b = \cos(\frac{\pi}{8}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{8})$. Prouver que $b^2 = a$.

3 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que $c = 1$. La rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{8}$ transforme le point M d'affixe z au point M' d'affixe z'.

0,25 pt **a)** Vérifier que $z' = bz$.

0,5 pt **b)** Déterminer l'image de C par la rotation R et montrer que A est l'image de B par R.

0,75 pt **4 - a)** Montrer que $|a - b| = |b - c|$ puis déduire la nature du triangle ABC.

0,5 pt **b)** Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$.

5 - Soit T la translation du vecteur $\vec{u}$ et D l'image de A par la translation T.

0,25 pt **a)** Vérifier que l'affixe de D est $b^2 + 1$.

0,75 pt **b)** Montrer que $\dfrac{b^2 + 1}{b} = b + \bar{b}$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés.

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2020 — 4 Pts

On considère la fonction numérique $\mathcal{U}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathcal{U}(x) = \mathrm{e}^x - 2x + 2 - 3\mathrm{e}^{-x}$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathcal{U}'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x - 1)^2 + 2}{\mathrm{e}^x}$.

0,25 pt **b)** Poser le tableau de variations de la fonction $\mathcal{U}$ (sans calcul de limite).

0,5 pt **c)** En déduire le signe de la fonction $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{R}$ (**remarquer que** $\mathcal{U}(0) = 0$).

2 - Soit la fonction numérique $\mathcal{V}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathcal{V}(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - 3$.

0,5 pt **a)** Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$, $\mathcal{V}(x) = \mathrm{e}^x\,\mathcal{U}(x)$.

0,5 pt **b)** En déduire le signe du fonction $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{R}$.

0,5 pt **3 - a)** Montrer que la fonction $\mathcal{W}$ définie par $\mathcal{W}(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + (4 - 2x)\mathrm{e}^x - 3x$ est une primitive de la fonction $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{R}$.

0,5 pt **b)** Calculer l'intégrale $\int_0^2 \mathcal{V}(x)\mathrm{d}x$.

0,75 pt **c)** Montrer que $\frac{9}{2}$ est le minimum absolu de la fonction $\mathcal{W}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2020 — 9 Pts

I - Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \mathrm{e}^{(1-x)} + \frac{1}{x} - 2$

0,5 pt **1 -** Monter que $g'(x) < 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

0,5 pt **2 -** Déduire le tableau de variations de la fonction $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ (remarquer que $g(1) = 0$).

II - On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{(1-x)} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln x$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm)

0,5 pt **1 -** Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

0,75 pt **b)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.

1 pt **3 - a)** Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = (x-2)g(x)$

0,75 pt **b)** Montrer que f est décroissante sur $]0;1]$ et sur $[2;+\infty[$ et croissante sur $[1;2]$.

0,25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$ (on admet $f(2) \approx 1,25$)

0,5 pt **4 -** Sachant que $f(3) \approx 0,5$ et $f(4) \approx -1,9$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]3;4[$.

1 pt **5 -** Construire $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

III - On pose $h(x) = f(x) - x$ pour tout x de $[1;2]$.

0,5 pt **1 - a)** A partir du tableau de variations de la fonction h ci contre, montrer que $f(x) \leq x$, pour tout x de $[1;2]$.

0,25 pt **b)** Montre que 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[1;2]$.

x	1	2
$h(x)$	0 ↘	$h(2)$

2 - Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,75 pt **a)** Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

0,75 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

FIN