ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2021

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (4 pts)

0.5 pt **1 -** Par récurrence :

Pour $n = 0$, on a : $0 < u_0 = \frac{1}{3} < 1$.

Supposons que $0 < u_n < 1$ pour un certain rang n et montrons que $0 < u_{n+1} < 1$.

On a $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$ et d'après l'hypothèse de récurrence $1 + u_n > 0$ et $3 - u_n > 0$ donc $u_{n+1} > 0$.

Montrons que $u_{n+1} < 1$:

$$u_{n+1} - 1 = \frac{1+u_n}{3-u_n} - 1 = \frac{2(u_n - 1)}{3-u_n}$$

Or $u_n < 1$, on aura $u_n - 1 < 0$ et comme $3 - u_n > 0$ en déduire que $u_{n+1} - 1 < 0$.

Ainsi que : $0 < u_{n+1} < 1$.

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 < u_n < 1$.

0.5 pt **2 - a)** On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+u_n}{3-u_n} - u_n = \frac{1+u_n-u_n(3-u_n)}{3-u_n} = \frac{1-2u_n+u_n^2}{3-u_n} = \frac{(u_n-1)^2}{3-u_n}$$

Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)^2}{3-u_n}$.

0.5 pt **b)** Montrons que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question précédente on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-1)^2}{3-u_n} \geq 0$, donc la suite (u_n) est croissante. Or (u_n) est majorée par 1 $(0 < u_n < 1)$ donc elle est convergente.

0.75 pt **3 - a)** On a

$$v_{n+1} = \frac{1}{1-u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{2u_n-2}{u_n-3}} = \frac{u_n-3}{2(u_n-1)}$$

D'autre part :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n-3}{2(u_n-1)} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{1}{2}$$

D'où (u_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme : $v_0 = \frac{1}{1-u_0} = \frac{3}{2}$.

0.75 pt **b)** Déterminons v_n en fonction de n. Comme (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{3}{2}$ on a :

$$v_n = v_0 + \frac{1}{2}n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}n = \frac{n+3}{2}$$

Donc $v_n = \frac{n+3}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Montrons que $u_n = \frac{n+1}{n+3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$. On a :

$$v_n = \frac{1}{1-u_n} \Leftrightarrow 1-u_n = \frac{1}{v_n} \Leftrightarrow u_n = 1 - \frac{1}{v_n} \Leftrightarrow u_n = 1 - \frac{1}{\frac{n+3}{2}} \Leftrightarrow u_n = 1 - \frac{2}{n+3}$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{n+1}{n+3}$$

D'où $u_n = \frac{n+1}{n+3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **c)** On a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{3}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} = 1$$

Car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$.

Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

0.5 pt **4 -** On a :

$$u_n \geq \frac{1011}{1012} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+3} \geq \frac{1011}{1012} \Leftrightarrow 1012n + 1012 \geq 1011n + 3033 \Leftrightarrow n \geq 2021$$

Donc $u_n \geq \frac{1011}{1012}$ à partir de $n = 2021$.

Exercice 2 : (5 pts)

0.75 pt **1 -** On résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$. On a $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 13 = -16 < 0$.

Donc l'équation admet deux solutions complexes z_1 et z_2 tels que :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{6 + 4i}{2} = 3 + 2i \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{6 - 4i}{2} = 3 - 2i$$

D'où $S = \{3 + 2i; 3 - 2i\}$.

0.5 pt **2 - a)** On a :

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{-1 - 2i - (3 - 2i)}{3 + 2i - (3 - 2i)} = \frac{-4}{4i} = -\frac{1}{i} = i$$

Donc $\dfrac{c-b}{a-b} = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$.

0.5 pt **b)** On a : $\left|\dfrac{c-b}{a-b}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{c-b}{a-b}\right) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.

Donc le triangle ABC est isocèle rectangle en B.

0.5 pt **3 - a)** $M(z)$ est l'image de point $M'(z')$ par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned} z' - b = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - b) &\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - b) + b \\ &\Leftrightarrow z' = i(z - 3 + 2i) + 3 - 2i \\ &\Leftrightarrow z' = iz - 5i + 1 \end{aligned}$$

D'où $z' = iz - 5i + 1$.

0.25 pt **b)** On a :

$$ia - 5i + 1 = i(3 + 2i) - 5i + 1 = -1 - 2i = c$$

Donc C est l'image de A par la rotation R.

0.5 pt **4 - a)** On a :

$$\frac{c-a}{d-a} = \frac{-1 - 2i - (3 + 2i)}{-3 - 4i - (3 + 2i)} = \frac{-4 - 4i}{-6 - 6i} = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}$$

D'où les points A, C et D sont alignés.

0.5 pt **b)** Noter k le rapport de l'homothétie h de centre C qui transforme A en D. On a :

$$d - c = k(a - c) \Leftrightarrow k = \frac{d-c}{a-c} = \frac{-3 - 4i - (-1 - 2i)}{3 + 2i - (-1 - 2i)} = \frac{-2 - 2i}{4 + 4i} = -\frac{1}{2}$$

Donc l'homothétie h est de rapport $k = -\dfrac{1}{2}$.

0.5 pt **c)** On sait que $BCDE$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED}$ et on a :

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ED} \Leftrightarrow c - b = d - m$$
$$\Leftrightarrow m = d - c + b$$
$$\Leftrightarrow m = 1 - 4i$$

D'où $m = 1 - 4i$.

0.5 pt **5 - a)** On a :

$$\frac{d-a}{m-d} = \frac{-6-6i}{-2-2i} = 3 \in \mathbb{R}$$

0.5 pt **b)** On a $\dfrac{d-a}{m-d} = 3$ donc $d - a = 3(m - b)$ ceci est équivalant à $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BE}$.
D'autre part, on a $\dfrac{b-a}{m-d} = \dfrac{-4i}{4} = -i$ donc $AB = ED$.
En déduire que $ABED$ est un trapèze isocèle.

Exercice 3 : (3 pts)

0.5 pt **1 -** Montrons que h est strictement croissante. On a :

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0 \text{ (car : } x > 0)$$

D'où h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

0.5 pt **2 -** Comme h est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et de plus h est continue sur $]0; +\infty[$.
On a :

$$h(]0; +\infty[) =]\lim_{x\to 0^+} h(x); \lim_{x\to+\infty} h(x)[$$

et on a $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x + \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \ln(x) = +\infty$.
D'où $h(]0; +\infty[) =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

0.5 pt **3 - a)** Comme h est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $0 \in h(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$.
D'après le T.V.I l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0; +\infty[$.

0.5 pt **b)** On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$ et $h(1) = 1$ donc $0 \in h(]0; 1])$.
Par suite : $0 < \alpha < 1$.

0.5 pt **4 - a)** D'après la question précédente on a :

$$h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \ln(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\ln(\alpha)$$

D'autre part : $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} + \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} - \ln(\alpha)$.

D'où $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.

0.5 pt **b)** On a :

$$h(\alpha) - 2 = \alpha + \frac{1}{\alpha} - 2 = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} > 0$$

D'où $h(\alpha) > 2$.

Problème : (8 pts)

0.5 pt **1 -** On a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2 - xe^{-x+1} = \lim_{x\to+\infty} 2 - xe^{-x}e$$

Or $\lim_{x\to+\infty} -xe^{-x} = \lim_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0$ (On pose : $X = -x$). D'où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Interprétation géométrique :

(C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $+\infty$.

0.5 pt **2 - a)** On a :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2 - xe^{-x+1}$$

Or $\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^{-x+1} = +\infty$ car $\lim_{x\to-\infty} -x + 1 = +\infty$.

Donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

0.75 pt **b)** On a :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2 - xe^{-x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} - e^{-x+1}$$

Or $\lim_{x\to-\infty} e^{-x+1} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$.

Donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

D'autre part, on a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

D'où (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

0.75 pt **3 - a)** On a :

$$f'(x) = (2 - xe^{-x+1})' = -(e^{-x+1} - xe^{-x+1}) = (x-1)e^{-x+1}$$

D'où $f'(x) = (x-1)e^{-x+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** Étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Comme $e^{-x+1} > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$. Donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

0.5 pt **4 - a)** On a $f'(x) = (x-1)e^{-x+1}$ donc :

$$f''(x) = ((x-1)e^{-x+1})' = e^{-x+1} - (x-1)e^{-x+1} = (2-x)e^{-x+1}$$

D'où $f''(x) = (2-x)e^{-x+1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.5 pt **b)** Étudiant le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$.

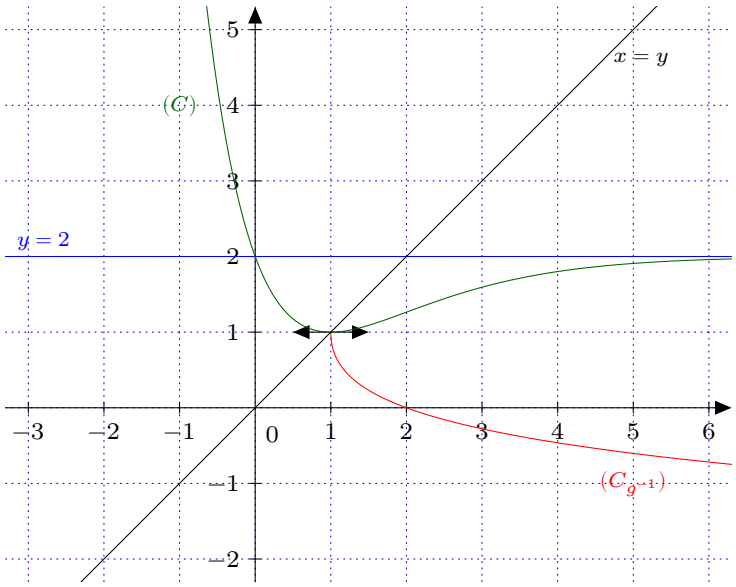
Comme $e^{-x+1} > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$, le signe de $f''(x)$ est celui de $2-x$. Donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$2-x$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

D'après le tableau f'' s'annule et change de signe en 2.

Donc (C) admet un point d'inflexion d'abscisse 2.

1 pt **5 -** Construction de la courbe (C) :



0.5 pt **6 -** D'après le tableau de variations f' s'annule et change de singe sur $\mathbb{R}$ en 1.

Donc $f(1)$ est une valeur minimale de f sur $\mathbb{R}$.

Et par suite $f(x) \geq f(1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$, c'est à dire que :

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow 2 - xe^{-x+1} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq xe^{-x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{-x+1}} \geq x \Leftrightarrow e^{x-1} \geq x$$

D'où $e^{x-1} \geq x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0.5 pt **7 - a)** On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$.

Comme u et v sont dérivables telles que u' et v' continues. Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^2 xe^{-x}dx &= [-xe^{-x}]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x}dx \\ &= -2e^{-2} + [-e^{-x}]_0^2 \\ &= -2e^{-2} + (-e^{-2} + 1) \\ &= -3e^{-2} + 1. \end{aligned}$$

D'où $\int_0^2 xe^{-x}dx = -3e^{-2} + 1.$

0.5 pt **b)** On a :

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)dx &= \int_0^2 2 - xe^{-x+1}dx \\ &= \int_0^2 2dx - e\int_0^2 xe^{-x}dx \\ &= 4 - e(-3e^{-2} + 1) \\ &= 4 - e + 3e^{-1}. \end{aligned}$$

D'où $\int_0^2 f(x)dx = 4 - e + 3e^{-1}.$

0.5 pt **8 - a)** g est la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty; 1]$. Donc g continue est strictement décroissante sur $]-\infty; 1]$ et par suite, elle admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J où

$$\begin{aligned} J &= g(]-\infty; 1]) \\ &= \Big[g(1); \lim_{x\to-\infty} g(x)\Big[\\ &= \Big[f(1); \lim_{x\to-\infty} f(x)\Big[\\ &= [1; +\infty[\end{aligned}$$

0.75 pt **b)** On sait que la courbe représentative de g^{-1} sur $[1;+\infty[$ est la symétrique de la courbe représentative de f sur l'intervalle $]-\infty;1]$. Voir la figure précédente.

0.25 pt **c)** La courbe représentative de g^{-1} admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses. $\boxed{\text{Donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g^{-1}(x)}{x} = 0.}$