Exercice 1 — Session : NORMAL 2021 — 2 Pts

0,5 pt **1 - a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

0,5 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{2x} - 4e^x + 3 \leqslant 0$

0,5 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1}$

0,5 pt **2 -** Montrer que l'équation $e^{2x} + e^x + 4x = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[-1; 0]$

Exercice 2 — Session : NORMAL 2021 — 4 Pts

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,25 pt **1 -** Calculer u_1

0,5 pt **2 -** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < u_n < \dfrac{1}{2}$

0,5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$

0,5 pt **b)** En déduire la monotonie de la suite (u_n)

0,75 pt **4 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0 < u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$; puis calculer la limite de la suite (u_n)

0,5 pt **b)** On pose $v_n = \ln(3 - 2u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, calculer $\lim v_n$

0,5 pt **5 - a)** Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\dfrac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\dfrac{1}{u_n} - 1\right)$

0,5 pt **b)** En déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 3 — Session : NORMAL 2021 — 5 Pts

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$

2 - Soient les nombres complexes $a = e^{id\frac{\pi}{6}}$ et $b = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

0,25 pt **a)** Écrire a sous forme algébrique .

0,5 pt **b)** Vérifier que $\overline{a}b = \sqrt{3}$

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $\overline{a}$.

0,5 pt **3 -** Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport.

4 - Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

0,5 pt **a)** Ecrire z' en fonction de z et a

0,25 pt **b)** Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R, montrer que $d = a + 1$.

0,5 pt **c)** Soit I le point d'affixe le nombre 1 , montrer que $ADIO$ est un losange.

0,75 pt **5 - a)** Vérifier que $d - b = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$; en déduire un argument du nombre $d - b$

0,5 pt **b)** Ecrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique.

0,5 pt **c)** Déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}\right)$

Exercice 4 — Session : NORMAL 2021 — 9 Pts

Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(0)=0$ et $f(x)=2x\ln x-2x$ si $x>0$
et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ (**unité : 1cm**)

0,5 pt **1 -** Montrer que f est continue à droite au point 0.

0,5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0,5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat.

0,75 pt **3 - a)** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

0,5 pt **b)** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$

0,5 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$

0,5 pt **4 - a)** Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ les équations $f(x)=0$ et $f(x)=x$.

1 pt **b)** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$(on prend : $e^{\frac{3}{2}}\simeq 4,5$)

0,5 pt **5 - a)** En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{1+e^2}{4}$

0,5 pt **b)** En déduire : $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$

0,25 pt **6 - a)** Déterminer le minimum de f sur $]0;+\infty[$

0,5 pt **b)** En déduire que pour tout x de $]0;+\infty[$, $\ln x\geqslant\dfrac{x-1}{x}$.

7 - Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1;+\infty[$

0,5 pt **a)** Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

0,75 pt **b)** Construire dans le même repère $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ la courbe représentative de la fonction g^{-1}

8 - On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases}h(x)=x^3+3x \;\;;\;\; x\leqslant 0\\ h(x)=2x\ln x-2x \;\;;\;\; x>0\end{cases}$

0,5 pt **a)** Étudier la continuité de h au point 0

0,5 pt **b)** Etudier la dérivabilité de la fonction h à gauche au point 0 puis interpréter géométriquement le résultat.

0,25 pt **c)** La fonction h est-elle dérivable au point 0 ? justifier.

FIN