Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2021 — 4 Pts

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite numérique définie par : $\mathcal{U}_0 = \frac{1}{3}$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{1+\mathcal{U}_n}{3-\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 -** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < \mathcal{U}_n < 1$.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{(\mathcal{U}_n - 1)^2}{3 - \mathcal{U}_n}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est convergente.

3 - On pose $\mathcal{V}_n = \frac{1}{1-\mathcal{U}_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,75 pt **a)** Montrer que $(\mathcal{V}_n)$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.

0,75 pt **b)** Déterminer $\mathcal{V}_n$ en fonction de n et en déduire $\mathcal{U}_n = \frac{n+1}{n+3}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **c)** Calculer la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)$.

0,5 pt **4 -** A partir de quelle valeur de n, a-t-on $\mathcal{U}_n \geqslant \frac{1011}{1012}$?

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2021 — 5 Pts

0,75 pt **1 -** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 6z + 13 = 0$

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que : $a = 3+2i$; $b = 3-2i$ et $c = -1-2i$.

0,5 pt **a)** Ecrire $\frac{c-b}{a-b}$ sous forme trigonométrique.

0,5 pt **b)** En déduire la nature de triangle ABC.

3 - Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit M un point du plan d'affixe z et le point M' d'affixe z' l'image de M par R, et soit D le point d'affixe $d = -3 - 4i$.

0,5 pt **a)** Écrire z' en fonction de z.

0,25 pt **b)** Vérifier que C et l'image de point A par R.

0,5 pt **4 - a)** Montrer que les point A, C et D sont alignés.

0,5 pt **b)** Déterminer le rapport de l'homothétie h de centre C et qui transforme A en D.

0,5 pt **c)** Déterminer l'affixe m du point E pour que la quadrilatère $BCDE$ soit un parallélogramme.

0,5 pt **5 - a)** Montrer que $\frac{d-a}{m-b}$ est un nombre réel.

0,5 pt **b)** En déduire que quadrilatère $ABED$ est un trapèze isocèle.

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2021 — 3 Pts

On considère la fonction numérique h définie sur $]0;+\infty[$ par : $h(x) = x + \ln x$.

0,5 pt **1 -** Montrer que la fonction h est strictement croissante sur $]0 + \infty[$.

0,5 pt **2 -** Déterminer $h(]0;+\infty[)$.

0,5 pt **3 - a)** En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$.

0,5 pt **b)** Montrer que $0 < \alpha < 1$.

0,5 pt **4 - a)** Vérifier que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$.

0,5 pt **b)** En déduire que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 2$.

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2021 — 8 Pts

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - xe^{-x+1}$.

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : $1cm$).

0,5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

0,5 pt **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

0,75 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, et interpréter le résultat géométriquement.

0,75 pt **3 - a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = (x-1)e^{-x+1}$.

0,5 pt **b)** Dresser le tableau de variations de la fonction f.

0,5 pt **4 - a)** Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

0,5 pt **b)** Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion d'abscisse 2.

1 pt **5 -** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prend : $f(2) \simeq 1,25$).

0,5 pt **6 -** Déterminer la valeur minimale de la fonction f et en déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{x-1} \geq x$.

0,5 pt **7 - a)** En utilisant une intégration par parties, calculer : $\int_0^2 xe^{-x}dx$.

0,5 pt **b)** En déduire que $\int_0^2 f(x)dx = 4 - e + 3e^{-1}$.

8 - Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty, 1]$.

0,5 pt **a)** Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

0,75 pt **b)** Construire la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0,25 pt **c)** A partir de la courbe représentative de g^{-1}, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{g^{-1}(x)}{x}\right)$.

FIN