ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2022

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(0,1,1)$, $B(1,2,0)$ et $C(-1,1,2)$

0.5 pt **1 - a) Montrons que :** $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}(1-0,2-1,0-1)\Longrightarrow\overrightarrow{AB}(1,1,-1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1-0,1-1,2-1)\Longrightarrow\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & 1 & -1\\ \vec{j} & 1 & 0\\ \vec{k} & -1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+\vec{k}$

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}$.

0.25 pt **b) Equation cartésienne du plan** (ABC)

Méthode 1 : On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}\Longrightarrow\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,0,1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal du plan (ABC). Donc $(ABC):x+z+d=0$

Or $A(0,1,1)\in(ABC)\Longrightarrow 0+1+d=0\Longrightarrow d=-1$

Alors $\boxed{(ABC):x+z-1=0}$

Méthode 2 : On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}\Longrightarrow\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,0,1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal du plan (ABC).

Soit $M(x,y,z)\in(ABC)\iff\overrightarrow{AM}\perp\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\iff\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$

$\iff(x-0)\times1+(y-1)\times0+(z-1)\times1=0\iff x+z-1=0$

Alors $\boxed{(ABC):x+z-1=0}$

Méthode 3 : Puisque $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{k}$ alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$.

Alors les trois points A,B et C sont non alignés. Donc ils forment un seul plan (ABC).

Pour que l'équation $x+z-1=0$ soit une équation du plan (ABC), il suffit que les coordonnées des points A, B et C vérifient cette équation :

- Pour $A(0,1,1)$: $0+1-1=0$
- Pour $B(1,2,0)$: $1+0-1=0$
- Pour $C(-1,1,2)$: $-1+2-1=0$

Donc $x+z-1=0$ est une équation du plan (ABC), alors $\boxed{(ABC): x+z-1=0}$

0.5 pt **2 - Soit $(S)\left(\Omega(1,1,2); R=\sqrt{2}\right)$. Déterminons une équation de la sphère (S).**

$(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2 \Longrightarrow (S): x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-4z+4=2$

$\Longrightarrow \quad \boxed{(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+4=0}$

0.5 pt **3 - Montrons que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en point A**

Méthode 1 : On calcul la distance du point Ω au plan (ABC) :

$d(\Omega;(ABC))=\dfrac{|1+2-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=R$

Donc le plan (ABC) est tangente à la sphère (S).

- Vérifions que $A\in(S)$:

$0^2+1^2+1^2-2\times0-2\times1-4\times1+4=0$ Donc $A\in(S)$

Puisque $A\in(ABC)$, alors le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en point A.

Méthode 2 : Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace, on a $M\in(ABC)\cap(S)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x+z-1=0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z=1-x \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(1-x-2)^2=2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z=1-x \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(x+1)^2=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z=1-x \\ x^2-2x+1+(y-1)^2+x^2+2x+1=2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} z=1-x \\ 2x^2+(y-1)^2=0 \end{cases}$$

Comme $2x^2\geq0$, $(y-1)^2\geq0$ et $2x^2+(y-1)^2=0$

Alors $2x^2=0 \Longrightarrow x=0$ et $(y-1)^2=0 \Longrightarrow y=1$

Puisque $z=1-x \Longrightarrow z=1$. Par suite $M(0,1,1)=A(0,1,1)$.

D'où le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en point A.

4 - On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)

0.25 pt **a) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ)**

Puisque $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,0,1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) et (Δ) est orthogonale au (ABC) en C , alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

Comme $C(-1,1,2) \in (\Delta)$ alors : $\boxed{(\Delta): \begin{cases} x = -1+t \\ y = 1 \qquad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2+t \end{cases}}$

0.5 pt **b) Montrons que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S)**

On suppose que $D(x,y,z)$ est un point de (Δ) et de (S).

Donc il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = -1+t \\ y = 1 \\ z = 2+t \\ x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+4=0 \end{cases}$

$\Longrightarrow (-1+t)^2+1^2+(2+t)^2-2(-1+t)-2\times 1-4(2+t)+4=0$

$\Longrightarrow t^2-2t+1+1+t^2+4t+4+2-2t-2-8-4t+4=0 \Longrightarrow 2t^2-4t+2=0$

$\Longrightarrow 2(t^2-2t+1)=0 \Longrightarrow (t-1)^2=0 \Longrightarrow t=1$

$\Longrightarrow \begin{cases} x=-1+t \Longrightarrow x=0 \\ y=1 \\ z=2+t \Longrightarrow z=3 \end{cases}$ Donc $\boxed{D(0,1,3)}$

Finalement, la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en point $D(0,1,3)$.

0.5 pt **c) Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)$, et la distance $d(A,(\Delta))$**

Méthode 1 : (géométriquement)

$\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$ $\left(\text{car } \left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\perp\overrightarrow{AC}\right) \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)=0}$

Méthode 2 : (analytiquement)

On a $\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$ et $\left(\vec{i}+\vec{k}\right)(1,0,1)$

Donc $\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)=(-1)\times 1+0\times 0+1\times 1=0 \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)=0}$

- Calcul de la distance $d(A,(\Delta))$:

Méthode 1 : Calcul direct

On a $\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i}+\vec{k}\right)=0$ donc $\overrightarrow{AC}\perp\left(\vec{i}+\vec{k}\right) \Longrightarrow \left(\vec{i}+\vec{k}\right)$ est un vecteur directeur de (Δ) donc $(AC)\perp(\Delta)$

Comme $C\in(\Delta) \Longrightarrow \boxed{d(A,(\Delta))=AC=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}}$

Méthode 2 : Calcul de $\overrightarrow{AC}\wedge\left(\vec{i}+\vec{k}\right)$ après on calcule $d(A,(\Delta))$.

On a $\overrightarrow{AC}\wedge\left(\vec{i}+\vec{k}\right)=\begin{vmatrix} \vec{i} & -1 & 1 \\ \vec{j} & 0 & 0 \\ \vec{k} & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}=2\vec{j}$

Puisque $C\in(\Delta)$ et le vecteur $\left(\vec{i}+\vec{k}\right)=\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) alors :

$$d(A,(\Delta)) = \frac{\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \left(\vec{i}+\vec{k}\right)\right\|}{\left\|\vec{i}+\vec{k}\right\|} = \frac{\sqrt{0^2+2^2+0^2}}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{d(A,(\Delta)) = \sqrt{2}}$$

Exercice 2 : (3 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe $a = -1 - i\sqrt{3}$, le point B d'affixe $b = -1 + i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

0.5 pt **1 - Soit D l'image du point B par la translation t**

$t(B) = D \Longrightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA} \Longrightarrow aff\left(\overrightarrow{BD}\right) = aff\left(\overrightarrow{OA}\right) \Longrightarrow d-b = a-0 \Longrightarrow d = a+b$

$\Longrightarrow d = \left(-1-i\sqrt{3}\right) + \left(-1+i\sqrt{3}\right) = -1-i\sqrt{3}+-1+i\sqrt{3} = -2$

Donc $\boxed{d=-2}$

2 - On considère la rotation R de centre D et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

0.5 pt **Soit C image du point B par la rotation R**

$R(B) = C \Longrightarrow z_C - z_D = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_B - z_D) \Longrightarrow c-d = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)(b-d)$

$\Longrightarrow c = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)(b-d) + d = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-1+i\sqrt{3}-(-2)\right) + (-2)$

$= -\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(-1+i\sqrt{3}+2\right) - 2 = -\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right) - 2 = -\frac{1}{2}\left(1^2 - \left(i\sqrt{3}\right)^2\right) - 2$

$\Longrightarrow c = -\frac{1}{2}(1+3) - 2 = -\frac{4}{2} - 2 = -2-2 = -4$

Donc $\boxed{c=-4}$

0.5 pt **3 - a) Écriture du nombre $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique**

Méthode 1 :

$$\frac{b-c}{a-c} = \frac{-1+i\sqrt{3}-(-4)}{-1-i\sqrt{3}-(-4)} = \frac{-1+i\sqrt{3}+4}{-1-i\sqrt{3}+4} = \frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}} = \frac{\left(3+i\sqrt{3}\right)^2}{\left(3-i\sqrt{3}\right)\left(3+i\sqrt{3}\right)} = \frac{9+6i\sqrt{3}-3}{3^2-(i\sqrt{3})^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{b-c}{a-c} = \frac{6+6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Longrightarrow \boxed{\frac{b-c}{a-c} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

Méthode 2 :

$b-c = -1+i\sqrt{3}-(-4) = 3+i\sqrt{3} \Longrightarrow \|b-c\| = \sqrt{3^2+(i\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$$\Longrightarrow b-c = 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left[2\sqrt{3}\ ,\ \frac{\pi}{6}\right]$$

$$a-c = -1-i\sqrt{3}-(-4) = 3-i\sqrt{3} = \overline{(b-c)} = \overline{\left[2\sqrt{3}\ ,\ \frac{\pi}{6}\right]} = \left[2\sqrt{3}\ ,\ -\frac{\pi}{6}\right]$$

Donc $\frac{b-c}{a-c} = \frac{\left[2\sqrt{3}\ ,\ \frac{\pi}{6}\right]}{\left[2\sqrt{3}\ ,\ -\frac{\pi}{6}\right]} = \left[\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\ ,\ \frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \left[1\ ,\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right] = \left[1\ ,\ \frac{\pi}{3}\right]$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{b-c}{a-c} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

0.5 pt **b) Conclure que** $\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)^2 = \dfrac{c-d}{b-d}$

On a $\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)^2 = \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^2 = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ **(1)**

Puisque C est l'image de B par la rotation $R\left(D\ ,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$ alors :

$c-d = \left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)(b-d) \implies \dfrac{c-d}{b-d} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ **(2)**

De **(1)** et **(2)** on conclure que : $\boxed{\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)^2 = \dfrac{c-d}{b-d}}$

4 - Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2, (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartenant aux deux cercles (Γ) et (Γ')

0.25 pt **a) Vérifions que** $|z+2| = 2$

On a $M(z) \in (\Gamma) \implies DM = 2 \implies |z_M - z_D| = 2 \implies |z-(-2)| = 2 \implies \boxed{|z+2| = 2}$

0.5 pt **b) Montrons que** $z + \overline{z} = -8$

On a $M(z) \in (\Gamma') \implies OM = 4 \implies |z_M - z_O| = 4 \implies |z| = 4 \implies |z|^2 = z\overline{z} = 16$

Or $|z+2| = 2 \implies |z+2|^2 = (z+2)\,\overline{(z+2)} = (z+2)\left(\overline{z}+\overline{2}\right) = (z+2)\left(\overline{z}+2\right) = 4$

$\implies z\overline{z} + 2z + 2\overline{z} + 4 = 4 \implies 16 + 2\left(z+\overline{z}\right) = 0 \implies \left(z+\overline{z}\right) = \dfrac{-16}{2} = -8$

Donc $\boxed{z + \overline{z} = -8}$

0.25 pt **c) Conclure que les deux cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique**

Soit $M(z)$ un point d'intersection des deux cercles (Γ) et (Γ').

Supposons que $z = x + \mathrm{i}y$ est la forme algébrique de z.

On a $z + \overline{z} = -8$ Donc $x + \mathrm{i}y + x - \mathrm{i}y = -8 \implies 2x = -8 \implies x = -\dfrac{8}{2} = -4$

Donc $z = -4 + \mathrm{i}y$, et puisque $|z| = 4 \implies \sqrt{(-4)^2 + (\mathrm{i}y)^2} = 4 \implies (-4)^2 + y^2 = 16$

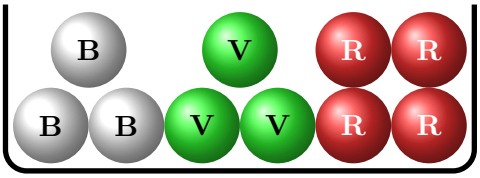
Alors $16 + y^2 = 16$ D'où $y^2 = 0 \implies y = 0$

Donc $z = -4 + \mathrm{i} \times 0 = -4 = c$

Donc les deux cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique C d'affixe $c = -4$.

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasared simultanément trois boules de l'urne.



Tirage simultanéé de trois boules

Puisque les tirage est **simultanément** de **trois boules** parmi **dix boules**, alors chaque possibilité est **une combinaison de trois éléments parmi dix éléments**. Le nombre de cas possible est **le nombre de combinaison de** 3 **parmi** 10, donc :

$Card(\Omega) = C_{10}^3 = \dfrac{A_{10}^3}{3!} = \dfrac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = 10\times 3\times 4 = 120$

Puisque les dix boules sont **indiscernables au toucher**, alors la condition **d'équiprobabilité** est vérifiée le long de l'exercice. Donc : $p(evenement) = \dfrac{Card(evenement)}{Card(\Omega)}$

0.75 pt **1 -** A « **Aucune boule rouge tirée** » : $\{\overline{R};\overline{R};\overline{R}\}$

$$p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{C_6^3}{120} = \frac{\frac{A_6^3}{3!}}{120} = \frac{\frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1}}{120} = \frac{5\times 4}{120} = \frac{1}{6} \Longrightarrow \boxed{p(A) = \frac{1}{6}}$$

0.75 pt **2 -** B « **Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes** » : $\{B;B;B\}$ ou $\{V;V;V\}$

$$p(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{C_3^3 + C_3^3}{120} = \frac{1+1}{120} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60} \Longrightarrow \boxed{p(B) = \frac{1}{60}}$$

0.75 pt **3 -** C « **Obtenir exactement une boule rouge** » : $\{R;\overline{R};\overline{R}\}$

$$p(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{C_4^1\times C_6^2}{120} = \frac{\frac{4\times A_6^2}{2!}}{120} = \frac{\frac{4\times 6\times 5}{2\times 1}}{120} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{p(C) = \frac{1}{2}}$$

0.75 pt **4 -** D « **Obtenir au moins deux boules rouges** » : $\{R;R;\overline{R}\}$ ou $\{R;R;R\}$

Méthode 1 :

$$p(D) = \frac{Card(D)}{Card(\Omega)} = \frac{C_4^2\times C_6^1 + C_4^3}{120} = \frac{(6\times 6)+4}{120} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{p(D) = \frac{1}{3}}$$

Méthode 2 : L'évènement contraire de D est « **tirer exactement une boule rouge ou bien aucune boule rouge tirée.** »

On a $\overline{D} = A\cup C \Longrightarrow p\left(\overline{D}\right) = p(A) + p(C) - p\left(A\cap C\right)$.

Or les évènements A et C ne peuvent pas être réalisés en même temps, alors $p\left(A\cap C\right) = 0$

Donc $p\left(\overline{D}\right) = p(A) + p(C) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1+3}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Et puisque $p(D) = 1 - p\left(\overline{D}\right)$ alors $p(D) = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3} \Longrightarrow \boxed{p(D) = \frac{1}{3}}$

Exercice 4 : (2.5 pts)

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x$

0.75 pt **1 - a) Vérifions que $x\mapsto x\mathrm{e}^x$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$; et calculons** $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} h(x)\mathrm{d}x$

$\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ (x\mathrm{e}^x)' = (x)'\,\mathrm{e}^x + x\,(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x + xx'\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\,\mathrm{e}^x = h(x)$

Donc $x\mapsto x\mathrm{e}^x$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

- Calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} h(x)\mathrm{d}x$:

$$I = \int_{-1}^{0} h(x)\mathrm{d}x = \Big[x\mathrm{e}^x\Big]_{-1}^{0} = 0\times\mathrm{e}^0 - (-1)\times\mathrm{e}^{-1} = 0 + \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \Longrightarrow \boxed{I = \int_{-1}^{0} h(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}}}$$

0.75 pt **b) Calculons** $J = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 \, \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ **(Intégration par parties) :**

Soient $U'(x) = \mathrm{e}^x$ et $V(x) = (x+1)^2$

Donc $U(x) = \mathrm{e}^x$ et $V'(x) = 2(x+1)'(x+1) = 2(x+1)$

$\Longrightarrow J = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 \, \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} U'(x)V(x)\mathrm{d}x = \Big[U(x)V(x)\Big]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} U(x)V'(x)\mathrm{d}x$

$\Longrightarrow J = \Big[(x+1)^2\mathrm{e}^x\Big]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2(x+1)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \Big((0+1)^2\mathrm{e}^0 - ((-1)+1)^2\,\mathrm{e}^{-1}\Big) - 2\int_{-1}^{0} h(x)\mathrm{d}x$

$\Longrightarrow J = 1 - 2I = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \Longrightarrow \boxed{J = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 \, \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}}$

0.5 pt **2 - a) Résolvons l'équation différentielle** $(E) : y'' - 2y' + y = 0$

L'équation caractéristique de cette équation est : $r^2 - 2r + 1 = 0$

Donc $(r-1)^2 = 0 \Longrightarrow r - 1 = 0 \Longrightarrow r = 1$ (Solution unique)

D'où les solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = 0$ sont de la forme :

$y(x) = (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^{rx}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \; ; \quad y(x) = (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^x \quad / \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$

0.5 pt **b) Montrons que h est la solution de (E) vérifiant :** $h(0) = 1$ **et** $h'(0) = 2$

On a $y(x) = (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^x \; / \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ est la solution générale de l'équation (E).

On a $y(0) = 1 \Longrightarrow (\alpha \times 0 + \beta)\mathrm{e}^0 = 1 \Longrightarrow \beta = 1$

$\forall x, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \; ; \; y'(x) = \Big(\alpha x + \beta)\mathrm{e}^x\Big)' = (\alpha x + \beta)'\mathrm{e}^x + (\alpha x + \beta)\,(\mathrm{e}^x)' = \alpha\mathrm{e}^x + (\alpha x + \beta)\mathrm{e}^x$

Donc $y'(0) = 2 \Longrightarrow \alpha\mathrm{e}^0 + (\alpha \times 0 + 1)\mathrm{e}^0 = 2 \Longrightarrow \alpha + 1 = 2 \Longrightarrow \alpha = 1$

Pour $\alpha = 1$ et $\beta = 1$ on a $y(x) = (x+1)\mathrm{e}^x = h(x) \Longrightarrow h$ est une solution de (E).

On a $h(0) = (0+1)\mathrm{e}^0 = 1$

$\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; h'(x) = \Big((x+1)\mathrm{e}^x\Big)' = (x+1)'\mathrm{e}^x + (x+1)\,(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (x+2)\mathrm{e}^x$

Donc $h'(0) = (0+2)\mathrm{e}^0 = 2$

Donc h est la solution de (E) vérifiant : $h(0) = 1$ et $h'(0) = 2$

Problème : (8.5 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$; $\left(\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1cm\right)$

0.5 pt **1 - Calculons** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

- Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = +\infty$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\,(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2\right) = +\infty$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

- Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 0 \implies \lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1) = -1 \implies \lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = (-1)^2 = 1$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \implies \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x\,(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2\right) = -\infty$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

0.5 pt **2 - Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ en donnant l'interprétation géométriquement du résultat**

- Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\,(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = +\infty$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty}$

- Interprétation graphique de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$:

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

0.5 pt **3 - a) Montrons que (Δ) : $y = x$ est une asymptote de (C) au voisinage de $-\infty$**

Méthode 1 :

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(f(x) - x\Big) = \lim\limits_{x\to-\infty} \Big(x\,(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2 - x\Big) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\Big((\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2 - 1\Big)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} x\Big((\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1) - 1\Big)\Big((\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1) + 1\Big) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 - 1\Big)\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 + 1\Big) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \Big(2 \times \dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big)\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big) = 2\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big)\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big)$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big) = 0$ $\Big(\text{Car } \lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}) = 0\Big)$

Alors $2\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big)\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big) = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(f(x) - x\Big) = 0$

D'où la droite (Δ) : $y = x$ est une asymptote oblique de (C) au voisinage de $-\infty$

Méthode 2 : Soit $x \in \mathbb{R}$:

On a $f(x) = x\,(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = x\Big((\mathrm{e}^{\frac{x}{2}})^2 - 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 1\Big) = x + x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big) = x + 2\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big)$

$\implies f(x) - x = x + 2\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big) - x = 2\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big)$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big) = 0$ $\Big(\text{Car } \lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}) = 0\Big)$

Alors $2\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big)\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2\Big) = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \Big(f(x) - x\Big) = 0$

D'où la droite (Δ) : $y = x$ est une asymptote oblique de (C) au voisinage de $-\infty$

Méthode 3 :

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ donc on calcul $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\,(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1)^2 = (-1)^2 = 1$ $\Big(\text{Car } \lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}) = 0\Big)$

On calcul $\lim\limits_{x\to-\infty}\Big(f(x)-x\Big)$; On a (méthode 1 ou 2) : $\lim\limits_{x\to-\infty}\Big(f(x)-x\Big)=0$

Donc la droite (Δ) : $y=x$ est une asymptote oblique de (C) au voisinage de $-\infty$

0.75 pt **b) Étudions le signe de $(f(x)-x)$ et la position relative de (C) et (Δ)**

- Étudions le signe de $(f(x)-x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$\forall x\in\mathbb{R}$; On a :

$f(x)-x=x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2-x=x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-2\Big)$

$\forall x\in\mathbb{R}$; On a : $f(x)-x=0$ donc :

$x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-2\Big)=0 \iff x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=0$ ou $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-2=0$

$x=0$ ou $\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=2 \iff x=0$ ou $\frac{x}{2}=\ln(2)$

D'où $x=0$ ou $x=2\ln(2)=\ln(4)$

Donc $f(x)-x=0 \iff x=0$ ou $x=\ln(4)$

$f(x)-x>0 \iff x\in\,]-\infty;0[\cup]\ln(4);+\infty[$

$f(x)-x<0 \iff x\in\,]0;\ln(4)[$

Tableau de signe de $(f(x)-x)$:

x	$-\infty$		0		$\ln(4)$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$		$+$		$+$		$+$	
$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-2\Big)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Étudions la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) :

On a $f(x)-x=0 \iff x=0$ ou $x=\ln(4)$ veut dire que la courbe (C) et la droite (Δ) se rencontrent en deux points d'abscisses $x=0$ et $x=\ln(4)$

On a $f(x)-x>0 \iff x\in\,]-\infty;0[$ ou $x\in\,]\ln(4);+\infty[$ veut dire que la courbe (C) est en dessus de la droite (Δ) sur chacun des intervalles $]-\infty;0[$ et $]\ln(4);+\infty[$

On a $f(x)-x<0 \iff x\in\,]0;\ln(4)[$ veut dire que la courbe (C) est au dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $]0;\ln(4)[$

0.5 pt **4 - a) Montrons que : $f'(x)=\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2+x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)$ pour tout x de $\mathbb{R}$**

$\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x)=\Big(x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2\Big)'=(x)'\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2+x\Big(\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2\Big)'$

$\implies f'(x)=1\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2+2x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)'\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)=\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2+2x\Big(\frac{x}{2}\Big)'\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big)\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)$

$\implies f'(x)=\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2+2x\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)=\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2+x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)$

D'où $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)^2+x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)}$

0.5 pt **b) Vérifions que $x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)\geqslant 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$**

Méthode 1 :

- Si $x\in\mathbb{R}^+$ alors $x\geqslant 0$

$x\geqslant 0 \implies \frac{x}{2}\geqslant 0 \implies \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\geqslant \mathrm{e}^0 \implies \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\geqslant 1$

$\implies \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\geqslant 0 \implies x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)\geqslant 0$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}^+$; $x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)\geqslant 0$

- Si $x\in\mathbb{R}^-$ alors $x\leqslant 0$

$x\leqslant 0 \implies \frac{x}{2}\leqslant 0 \implies \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\leqslant \mathrm{e}^0 \implies \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\leqslant 1$

$\implies \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\leqslant 0 \implies x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)\geqslant 0$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}^-$; $x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)\geqslant 0$

Donc $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ x\Big(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\Big)\geqslant 0}$

Méthode 2 :

$\forall x \in \mathbb{R}$; On a :

$x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)=0 \iff x=0$ ou $e^{\frac{x}{2}}-1=0$

$\iff x=0$ ou $e^{\frac{x}{2}}=1$

$\iff x=0$ ou $\frac{x}{2}=\ln(1)=0$

$\iff x=0$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geqslant 0}$

Tableau de signe de $x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^{\frac{x}{2}}-1$		$-$	0	$+$	
$x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$		$+$	0	$+$	

Méthode 3 : Soit h une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$; On a : $h'(x)=\left(x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\right)'=(x)'\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+x\left(\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\right)'$

$\implies h'(x)=1\times\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+x\left(\frac{x}{2}\right)'e^{\frac{x}{2}}=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$

Si $x=0$ on a $h'(0)=0$

Si $x>0$ on a $e^{\frac{x}{2}}-1>0$ et $\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}>0$

$\implies h'(x)>0$

Si $x<0$ on a $e^{\frac{x}{2}}-1<0$ et $\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}<0$

$\implies h'(x)<0$

Tableau des variations et de signe de $h(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$
Signe de $h(x)$		$+$	0	$+$	

Donc $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ h(x)\geqslant 0$ et finalement $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geqslant 0}$

0.25 pt **c) Tableau des variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$**

$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f'(x)=\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)$

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geqslant 0$

alors $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geqslant 0$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2\geqslant 0$

alors $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\geqslant 0$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}\ ; f'(x)\geqslant 0$ d'où f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

5 - On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=(2x+4)\,e^{\frac{x}{2}}-x-4$

0.5 pt **a) Montrons que $f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$**

$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f''(x)=\left(\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\right)'=\left(\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)^2\right)'+\left(xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)\right)'$

$\implies f''(x)=2\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)'\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+(x)'e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+x\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)'$

$\implies f''(x)=2\left(\frac{x}{2}\right)'e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+x\left(\frac{x}{2}\right)'e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+xe^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)'e^{\frac{x}{2}}$

$\implies f''(x)=e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}e^{\frac{x}{2}}$

$\implies f''(x)=e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}}-1+e^{\frac{x}{2}}-1+\frac{x}{2}\left(e^{\frac{x}{2}}-1\right)+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)=e^{\frac{x}{2}}\left(2e^{\frac{x}{2}}-2+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}-\frac{x}{2}+\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)$

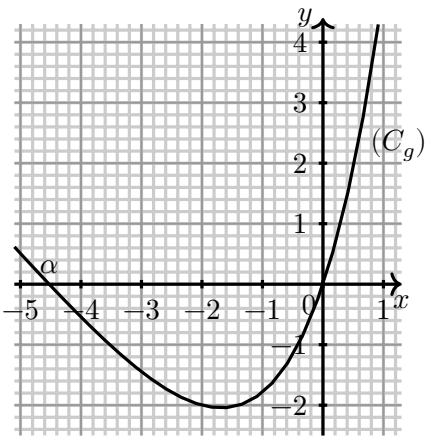
$\implies f''(x)=e^{\frac{x}{2}}\left(2e^{\frac{x}{2}}-2+xe^{\frac{x}{2}}-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(4e^{\frac{x}{2}}-4+2xe^{\frac{x}{2}}-x\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left((2x+4)e^{\frac{x}{2}}-x-4\right)$

Comme $g(x)=(2x+4)\,e^{\frac{x}{2}}-x-4$ alors $\boxed{f''(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)}$

b) Déterminons le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ à partir de la courbe sachant que $g(\alpha)=0$

0.5 pt

D'après la courbe de g on remarque que :



- $g(x) = 0 \iff x = \alpha$ ou $x = 0$ sont les abscisses des points de rencontre de la courbe de la fonction g et l'axe des abscisses.
- $g(x) < 0 \iff x \in]\alpha; 0[$ car la courbe de la fonction g est au dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]\alpha; 0[$.
- $g(x) > 0 \iff x \in]-\infty; \alpha[\cup]0; +\infty[$ car la courbe de la fonction g est en dessus de l'axe des abscisses sur les deux intervalles $]-\infty; \alpha[$ et $]0; +\infty[$.

0.5 pt

c) Étudions la concavité de la courbe (C).

$\forall x \in \mathbb{R}$; on a $f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$, comme $e^{\frac{x}{2}} \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ alors $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$; on a :

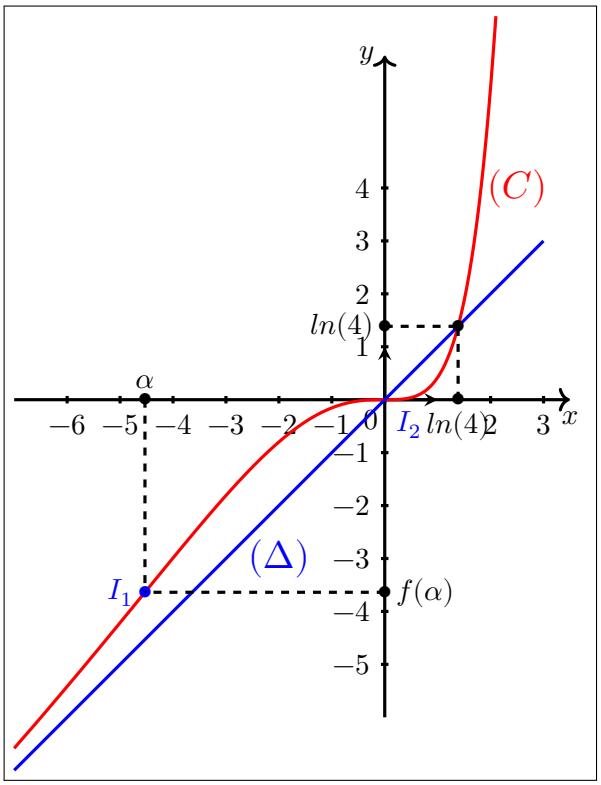
- $g(x) < 0 \iff x \in]\alpha; 0[$, alors $f''(x) < 0 \iff x \in]\alpha; 0[$. D'où (C) est concave sur $]\alpha; 0[$.
- $g(x) > 0 \iff x \in]-\infty; \alpha[\cup]0; +\infty[$, alors $f''(x) > 0 \iff x \in]-\infty; \alpha[\cup]0; +\infty[$. D'où (C) est convexe sur $]-\infty; \alpha[$ et sur $]0; +\infty[$.
- $g(x) = 0 \iff x = \alpha$ ou $x = 0$ Donc $f''(x) = 0 \iff x = \alpha$ ou $x = 0$. Donc (C) admet deux poiont d'inflexion $I_1\,(\alpha; f(\alpha))$ et $I_2(0; 0)$.

Tableau de concavété de (C) sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
(C)		*convexe*	I_1	*concave*	I_2	*convexe*	

1 pt

6 - Construction de la courbe (C)



0.5 pt **7 - a) Montrons que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$**

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J = f(\mathbb{R})$ telle que :

$J = f(\mathbb{R}) = f\Big(\,]-\infty;+\infty[\,\Big) = \Big]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\Big[=]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$

Donc la fonction f^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$.

0.25 pt **b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln(4))$**

D'après le resultat de la question **3 - b)** on a $\ln(4)$ est une solution de l'équation $f(x) = x$; donc $f(\ln(4)) = \ln(4)$.

Alors $f(\ln(4)) = \ln(4) \iff f^{-1}(\ln(4)) = \ln(4)$

$\left(f^{-1}\right)'(\ln(4)) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(\ln(4))\right)} = \dfrac{1}{f'(\ln(4))}$

Or $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 + xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$

$\implies f'(\ln(4)) = \left(e^{\frac{\ln(4)}{2}} - 1\right)^2 + \ln(4).e^{\frac{\ln(4)}{2}}\left(e^{\frac{\ln(4)}{2}} - 1\right) = \left(e^{\ln(2)} - 1\right)^2 + \ln(4).e^{\ln(2)}\left(e^{\ln(2)} - 1\right)$

$\implies f'(\ln(4)) = (2-1)^2 + \ln(4) \times 2(2-1) = \boxed{1 + 2\ln(4)}$

Donc $\left(f^{-1}\right)'(\ln(4)) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(\ln(4))\right)} = \dfrac{1}{f'(\ln(4))} = \dfrac{1}{1+2\ln(4)}$

Donc $\boxed{\left(f^{-1}\right)'(\ln(4)) = \dfrac{1}{1+2\ln(4)}}$

8 - Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **a) Montrons par récurrence que $0 < u_n < \ln(4)$ pour tout n de $\mathbb{N}$:**

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$, donc $0 < u_0 < \ln(4)$ (Vraie).
- Supposons que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ 0 < u_n < \ln(4)$ et montrons que : $0 < u_{n+1} < \ln(4)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n < \ln(4)$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc $f(0) < f(u_n) < f(\ln(4))$

Comme $f(0) = 0$; $f(\ln(4)) = \ln(4)$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_{n+1} < \ln(4)$.

D'après le raisonnement par raisonnement par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ 0 < u_n < \ln(4)}$

0.5 pt **b) Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :**

D'après le résultat de la question **3 - b)** on a : $f(x) - x < 0$ sur l'intervalle $]0;\ln(4)[$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n < \ln(4) \implies u_n \in]0;\ln(4)[$

Donc $f(u_n) - u_n < 0 \implies u_{n+1} - u_n < 0$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

0.25 pt **c) Convergence de la suite (u_n) :**

Puisque la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, alors elle est convergente.

0.5 pt **d) Calcul de la limite de la suite (u_n) :**

On a :

- $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
- f est continue sur l'intervalle $I =]0; \ln(4)[$.
- $f(I) \subset I$.
- $u_0 \in I$.
- La suite (u_n) est convergente.

Donc si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$ avec l solution de l'équation $f(x) = x$.

D'aprés le résultat de la question **3 - b)** on a $f(x) = x$ admet deux solutions réelles 0 et $\ln(4)$. Donc $l = 0$ ou bien $l = \ln(4)$.

Puisque (u_n) est décroissante et $u_0 = 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n \leqslant u_0 = 1$ et $l \leqslant 1 \implies l = 0$.

Finalement $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 0}$

FIN