ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2022

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (2,5 pts)

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 2$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 - a)** Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n > 1$.

Pour $n = 0$ on a : $(\mathcal{U}_0 = 2)$ et $2 > 1$ donc $\mathcal{U}_n > 1$ (vraie).

supposons que : $\mathcal{U}_n > 1$ et montrons que : $\mathcal{U}_{n+1} > 1$

On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_n > 1 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n > 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} > \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}\\ &\Leftrightarrow \mathcal{U}_{n+1} > 1\end{aligned}$$

Donc d'aprés le raisonnement par récurrence on a pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n > 1$.

0,75 pt **b)** Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(\mathcal{U}_n - 1)$ et déduire que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante et convergente.

Soit n un entier naturel,on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n &= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} - \mathcal{U}_n\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{2}\mathcal{U}_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n - \frac{2}{2}\mathcal{U}_n - \frac{\sqrt{2}-2}{2} = (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{2})\mathcal{U}_n - \frac{\sqrt{2}-2}{2}\end{aligned}$$

D'où : $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(\mathcal{U}_n - 1)$

0,75 pt Déduisons que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante et convergente :

On a:pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n > 1$

donc :pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n - 1 > 0$

De plus,$\sqrt{2}-2<0$d'où $\mathcal{U}_{n+1}-\mathcal{U}_n<0$

Il s'ensuit que la suite $(\mathcal{U}_n)$est décroissante.

Et comme $(\mathcal{U}_n)$ est minorée par 1 alors elle est convergente.

2 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n=\mathcal{U}_n-1$.

0,5 pt **a)** Montrons que $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique et déterminons sa raison et son premier terme.

Soit n de $\mathbb{N}$,on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{n+1}&=\mathcal{U}_{n+1}-1\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n+\frac{2-\sqrt{2}}{2}-1\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n+\frac{2-\sqrt{2}-2}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n-\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}(\mathcal{U}_n-1)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{V}_n\end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et du premier terme :

$\mathcal{V}_0=\mathcal{U}_0-1=2-1=1$

0,5 pt **b)** Ecrivons $\mathcal{U}_n$ en fonction de n puis déduisons la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)$.

On sait que $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et du premier terme :

$\mathcal{V}_0=1$ donc :$\forall n\in\mathbb{N}$ on a :$\mathcal{V}_n=\mathcal{V}_0\times q^{n-0}$

Donc :$(\forall n\in\mathbb{N})$ $\mathcal{V}_n=(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$ et comme pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n=\mathcal{U}_n-1$ alors pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n=\mathcal{V}_n+1$

D'où $(\forall n\in\mathbb{N})$ $\mathcal{V}_n=(\frac{\sqrt{2}}{2})^n+1$

En déduire la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)$.

Puisque :$-1<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$ alors $\lim(\frac{\sqrt{2}}{2})^n=0$ donc : $\lim\mathcal{U}_n=1$

0,25 pt **c)** Calculons la somme $S=\mathcal{U}_0+\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2+\cdots\cdots+\mathcal{U}_{2021}$.

On a :$S=\mathcal{U}_0+\mathcal{U}_1+\mathcal{U}_2+\cdots\cdots+\mathcal{U}_{2021}$

$S=\mathcal{V}_0+1+\mathcal{V}_1+1+\mathcal{V}_2+1+\cdots\cdots+\mathcal{V}_{2021}+1$

$S=\mathcal{V}_0+\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2+\cdots\cdots+\mathcal{V}_{2021}+1+1+1+\cdots\cdots+1$

$$\begin{aligned}&=\mathcal{V}_0\times\frac{1-q^{(2021-0+1)}}{1-q}+(2021-0+1)\times 1\\&=1\times\frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^{2022}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}+2022\\&=\frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^{2022}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}+2022\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{2^{2022}-\sqrt{2}^{2022}}{2^{2022}}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} + 2022$$
$$= \frac{\frac{2^{2022}-2^{1011}}{2^{2022}}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} + 2022$$
$$= \frac{2^{2022}-2^{1011}}{2^{2022}} \times \frac{2}{2-\sqrt{2}} + 2022$$
$$= \frac{2^{2022}-2^{1011}}{2-\sqrt{2}} \times \frac{1}{2^{2021}} + 2022$$

Exercice 2 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(1,-1,1)$ et $B(5,1,-3)$. Soit (S) la sphère de center $\Omega(3,0,-1)$ de rayon $R=3$, et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-2,1)$.

0,25 pt **1 - a)** Calculons la distance ΩA :

$\Omega A = \|\overrightarrow{\Omega A}\|$
$= \sqrt{(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 + (z_A - z_\Omega)^2}$
$= \sqrt{(1-3)^2 + (-1-0)^2 + (1-(-1))^2}$
$= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (2)^2}$
$= \sqrt{4+1+4}$
$= \sqrt{9}$
$= 3$

0,5 pt **b)** Montrons que les droites (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires.

On a :$\vec{u}(2,-2,1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

de plus,$\overrightarrow{\Omega A} \cdot \vec{u} = 2 \times (-2) + (-2) \times (-1) + 1 \times 2$
$= -4 + 4 = 0$

Donc les deux vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux

Par suite,les droites (Δ) et (ΩA)sont perpendiculaires.

0,25 pt **c)** Déduisons la position relative de la droite (Δ) et la sphère (S).

On a $\Omega A = 3 = R$ donc $A \in (S)$

D'autre part,$A \in (\Delta)$et les droites (Δ) et (ΩA)sont perpendiculaires

donc (Δ)est tangente à la sphère (S) en A.

0,5 pt **2 -** Soit le point $M_a(2a-3, 3-2a, a-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$, montrons que $\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}$ et déduisons que $M_a \in (\Delta)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

On a :$\overrightarrow{AM_a} = (x_{M_a - x_A})\vec{i} + (y_{M_a - y_A})\vec{j} + (z_{M_a - z_A})\vec{k}$
$= (2a-3-1)\vec{i} + (3-2a+1)\vec{j} + (a-1-1)\vec{k}$

$= (2a-4)\vec{i} + (4-2a)\vec{j} + (a-2)\vec{k}$

$= 2(a-2)\vec{i} - 2(a-2)\vec{j} + (a-2)\vec{k}$

$= (a-2)(2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}}$

Par suite,les deux vecteurs $\vec{u}$et$\overrightarrow{AM_a}$sont colinéaires

et comme $A \in (\Delta)$alors $M_a \in (\Delta)$

0,5 pt **3 - a)** Vérifions que $2x - 2y + z - 9a + 13 = 0$ est une équation du plan (P_a) passant par M_a et perpendiculaire à la droite (Δ)

On a:le plan (P_a) est perpendiculaire à la droite (Δ)

De plus,$\vec{u}(2,-2,1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

donc $\vec{u}$est un vecteur normal au plan (P_a)

d'où une une équation cartésienne du plan (P_a) s'écrit :

$(P_a) : 2x - 2y + z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

et puisque $M_a \in (\Delta)$ alors $2x_{Ma} - 2y_{Ma} + z_{Ma} + d = 0$

donc $2(2a-3) - 2(3-2a) + a - 1 + d = 0$ donc $4a - 6 - 6 + 4a + a - 1 + d = 0$ donc

$9a - 13 + d = 0$ donc $9a - 13 + d = 13 - 9a$

d'où $(P_a) : 2x - 2y + z + 13 - 9a = 0$

b) Montrons que $d(\Omega,(P_a)) = |3a-6|$

On a :$d(\Omega,(P_a)) = \dfrac{|2x_\Omega - 2y_\Omega + z_\Omega + 13 - 9a|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}$

$= \dfrac{|2\times 3 - 2\times 0 + 1\times(-1) + 13 - 9a|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}$

$= \dfrac{|2\times 3 - 2\times 0 + 1\times(-1) + 13 - 9a|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}$

$= \dfrac{|6 - 0 + -1 + 13 - 9a|}{\sqrt{4+4+1}}$

$= \dfrac{|18-9a|}{\sqrt{9}}$

$= 3\dfrac{|6-3a|}{3}$

$= |6-3a|$

0,5 pt donc $\boxed{d(\Omega,(P_a)) = |3a-6|}$

0,5 pt **c)** Déterminons les deux valeurs de a pour lesquelles le plan (P_a) est tangent à la sphère (S).

Comme le plan (P_a) est tangent à la sphère (S) alors $d(\Omega,(P_a)) = R$

Donc $|3a-6| = 3$

c-à-d :$3a - 6 = 3$ ou $3a - 6 = -3$

c-à-d :$3a = 3 + 6$ ou $3a = 6 - 3$

c-à-d :$3a = 9$ ou $3a = 3$

c-à-d : $\boxed{a = 3 \text{ ou } a = 1}$

Exercice 3 : (3 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1 + 5i$, $Z_B = 1 - 5i$ et $Z_C = 5 - 3i$.

0,25 pt **1 -** Déterminons le nombre complexe Z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$

On a : D est le milieu du segment $[AC]$

donc $Z_D = \dfrac{Z_A + Z_C}{2}$

$Z_D = \dfrac{1 + 5i + 5 - 3i}{2}$

$Z_D = \dfrac{6 + 2i}{2}$

$Z_D = 3 + i$

0,5 pt **2 -** Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

Déterminons le nombre complexe Z_E affixe du point E l'image de point B par h.

On a : $h(B) = E \iff \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\iff Z_E - Z_A = \frac{1}{2}(Z_B - Z_A)$

$\iff Z_E = Z_A + \frac{1}{2}(Z_B - Z_A)$

$\iff Z_E = 1 + 5i + \frac{1}{2}(1 - 5i - (1 + 5i))$

$\iff Z_E = 1 + 5i + \frac{1}{2}(1 - 5i - 1 - 5i)$

$\iff Z_E = 1 + 5i + \frac{1}{2}(-10i)$

$\iff Z_E = 1 + 5i - 5i$

$\iff Z_E = 1$

0,5 pt **3 -** On considère la rotation R de center C d'angle $\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)$, déterminons l'image de B par R.

Soit B' l'image de B par R

$R(B) = B' \iff Z_{B'} - Z_C = e^{-}\dfrac{\pi}{2}(Z_B - Z_C)$

et comme $e^{-\frac{\pi}{2}} = cos(\frac{\pi}{2}) + isin(\frac{-\pi}{2}) = -i$

alors $R(B) = B' \iff Z_{B'} = -i(1 - 5i - 5 + 3i) + 5 - 3i$

$\iff Z_{B'} = -i(-4 - 2i) + 5 - 3i$

$\iff Z_{B'} = 4i - 2 + 5 - 3i$

$\iff Z_{B'} = 3 + i = Z_D$

donc l'image de B par R est D

4 - Soit F le point d'affixe $Z_F = -1 + i$

0,25 pt **a)** Vérifions que $\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$

On a : $\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = \dfrac{3 + i - (1 + 5i)}{-1 + i - (1 + 5i)} \times \dfrac{-1 + i - 1}{3 + i - 1}$

$= \dfrac{3 + i - 1 - 5i}{-1 + i - 1 - 5i} \times \dfrac{-2 + i}{2 + i}$

$= \dfrac{2-4i}{-2-4i} \times \dfrac{-2+i}{2+i}$
$= -\dfrac{2(1-2i)}{2(1+2i)} \times \dfrac{i(1+2i)}{i(1-2i)}$
$= -\dfrac{1-2i}{1+2i} \times \dfrac{1+2i}{1-2i}$
$= -1$

b) En déduisons que $\overline{(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})} + \overline{(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})} \equiv \pi[2\pi]$.
On a : $\overline{(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})} + \overline{(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})} \equiv arg(\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A}) + arg(\dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E})[2\pi]$
$\equiv arg(\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E})[2\pi]$
$\equiv arg(-1)[2\pi]$
$\equiv \pi[2\pi]$
Donc $\overline{(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})} + \overline{(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})} \equiv \pi[2\pi]$.

0,5 pt

0,5 pt **c)** Déterminons la forme trigonométrique du nombre $\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}$
On a : $\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} = \dfrac{1-(-1+i)}{1+5i-(-1+i)}$
$= \dfrac{1+1-i)}{1+5i+1-i)}$
$= \dfrac{2-i}{2+4i}$
$= \dfrac{-i(1+2i)}{2(1+2i)}$
$= \dfrac{-1}{2}i$
$= \dfrac{1}{2}(0-i)$
$= \dfrac{1}{2}(cos(\frac{\pi}{2}) - isin(\frac{\pi}{2}))$
$= \dfrac{1}{2}(cos(\frac{-\pi}{2}) + isin(\frac{-\pi}{2}))$
Donc $\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} = \dfrac{1}{2}(cos(\frac{-\pi}{2}) + isin(\frac{-\pi}{2}))$
déduisons la nature du triangle AEF.
On a : $\overline{(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE})} \equiv arg(\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F})[2\pi]$
et d'après ce qui précède on a : $\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} = \dfrac{1}{2}(cos(\frac{-\pi}{2}) + isin(\frac{-\pi}{2}))$
donc $arg(\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$
d'où $\overline{(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FE})} \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$
ce qui nous permet de déduire que le triangle AEF est rectangle en F

0,5 pt **d)** Déduisons que les points A, D, E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre.
On a : $\dfrac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \dfrac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$
et $\dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} = \dfrac{-1}{2}i \Rightarrow \dfrac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F} \in i\mathbb{R}$
$\Rightarrow$les points A, E et F ne sont pas alignés.

Il s'ensuit que les points A, D, E et F sont cocycliques.

Et comme le triangle AEF est rectangle en F

alors les points A, D, E et F appartiennent au cercle (Γ) de diamètre$[AE]$

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient trois boules blanches, et quater boules rouges et cinq boules vertes, indiscernables au toucher : on tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Soient les événements :

1 - On considère les événements suivantes : A : "Obtenir exactement deux boules rouges"

B :" Obtenir exactement une boule verte"

0,75 pt

a) Montrons que : $P(A) = \frac{12}{55}$ et $P(B) = \frac{21}{44}$

A : "Obtenir exactement deux boules rouges"$\longrightarrow$ RR$\overline{R}$

alors $card(A) = C_4^2 \times C_8^1 = 48$

donc $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{48}{220} = \frac{12}{55}$

B :" Obtenir exactement une boule verte"$\longrightarrow$ V$\overline{V}\overline{V}$

alors $card(B) = C_5^1 \times C_7^2 = 105$

donc $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{105}{220} = \frac{21}{44}$

0,75 pt

b) Calculons $P(A/B)$: la probabilité de l'événement A Sachant que l'événement B est réalisé.

$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$(A \cap B) = \{RRV\}$ alors $card(A \cap B) = C_4^2 \times C_5^1 = 30$

donc $P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{30}{220}}{\frac{21}{44}} = \frac{\frac{3}{22}}{\frac{21}{44}} = \frac{2}{7}$

Déduction : Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Puisque $P(A/B) \neq P(A)$ alors Les événements A et B ne sont pas indépendants .

2 - Soit la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées.

1 pt

a) Déterminons la loi de la de probabilité X.

Les valeurs prises par X sont : 0 ;1 ;2 ;3

X=0 $\longrightarrow \overline{V}\,\overline{V}\,\overline{V}$

X=1 $\longrightarrow$ V $\overline{V}\,\overline{V}$

X=2 $\longrightarrow$ V V $\overline{V}$

X=3 $\longrightarrow$ V V V

On a :$P(X = 0) = \frac{C_7^3}{card(\Omega)} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$

$P(X = 1) = P(B) = \frac{21}{44}$

$P(X = 2) = \frac{C_5^2 \times C_7^1}{card(\Omega)} = \frac{70}{220} = \frac{7}{22}$

$P(X = 3) = \frac{C_5^3}{card(\Omega)} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$

Donc on peut résumer la loi de probabilité de X dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$

0,5 pt

b) calculons la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes.

$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{7}{22} + \frac{1}{22} = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$

Donc la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes est :$P(X \geq 2) = \frac{4}{11}$

Exercice 5 : (8 pts)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x^4(\ln x - 1)^2; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1 - Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

on sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - 1)^2 = +\infty$ (car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

• Déterminons la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4(\ln x-1)^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3(\ln x - 1)^2 = +\infty$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - 1)^2 = +\infty$)

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

alors : (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

2 - a) Montrons que f est continue à droite au point 0. Calculons : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+} x^4(\ln x - 1)^2 \\ &= \lim_{x\to0^+} \left(x^2(\ln x - 1)\right)^2 \\ &= \lim_{x\to0^+} \left(x^2\ln x - x^2\right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

car : $\lim\limits_{x\to0^+} x^2\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x^2 = 0$

0.25 pt

Comme $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0 = f(0)$ alors f est continue à droite au point 0.

b) Étudions la dérivabilité de la fonction f à droite en 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to0^+} \frac{x^4(\ln x-1)^2}{x} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to0^+} x^3(\ln x - 1)^2 \\ &= \lim_{x\to0^+} x \times (x(\ln x - 1))^2 \\ &= \lim_{x\to0^+} x \times (x\ln x - x)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

car : $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x = 0$

Alors f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

• Interprétation géométrique :

on a $f'_d(0) = 0$ alors (C) admet une demi tangente horizontale à droite de 0.

3 - a) Montrons que $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

on sait que la fonction $x \mapsto x^4$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ (restriction d'une fonction polynôme) et $x \mapsto (\ln x - 1)^2$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ (car $x \mapsto lnx$ est dérivable sur $]0;+\infty[$).

Donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme le produit de deux fonctions dérivables sur

$]0;+\infty[$. Alors :

$(\forall x \in]0;+\infty[) ; f'(x) = (x^4)'(\ln x - 1)^2 + \left((\ln x - 1)^2\right)' x^4$
$= 4x^3(\ln x - 1)^2 + 2(\ln x - 1)'(\ln x - 1)x^4$
$= 4x^3(\ln x - 1)^2 + 2 \times \frac{1}{x}(\ln x - 1)x^4$
$= 4x^3(\ln x - 1)^2 + 2x^3(\ln x - 1)$
$= 2x^3(\ln x - 1)(2(\ln x - 1) + 1)$
$= 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 2 + 1)$
$= 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$

Donc : $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

b) Dressons le tableau de variations de f.

Étudions le signe de $f'(x)$

On a $(\forall x \in]0;+\infty[) : 2x^3 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$

$(\ln x - 1)(2\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 ou 2\ln x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow \ln x = 1 ou \ln x = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow x = e ou x = e^{\frac{1}{2}}$
$\Leftrightarrow x = e ou x = \sqrt{e}$

Si : $x > e \Leftrightarrow \ln x > \ln(e) (carla fonction x \mapsto lnx est strictement croissante)$
$\Leftrightarrow \ln x > 1$

Si : $x < e \Leftrightarrow \ln x < \ln(e) (carla fonction x \mapsto lnx est strictement croissante)$
$\Leftrightarrow \ln x < 1$

Si : $x > \sqrt{e} \Leftrightarrow \ln x > \ln(\sqrt{e}) (carla fonction x \mapsto lnx est strictement croissante)$
$\Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow 2\ln x > 1$
$\Leftrightarrow 2\ln x - 1 > 0$

Si : $x < \sqrt{e} \Leftrightarrow \ln x < \ln(\sqrt{e}) (carla fonction x \mapsto lnx est strictement croissante)$
$\Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow 2\ln x < 1$
$\Leftrightarrow 2\ln x - 1 < 0$

En déduire que :

x	0		$\sqrt{e}$		e		$+\infty$
$lnx - 1$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$2\ln x - 1$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$(lnx - 1)(2\ln x - 1)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Le tableau de variation de f est :

x	0		$\sqrt{e}$		e		$+\infty$
$lnx-1$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$2\ln x-1$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	0	↗	$\frac{e^2}{4}$	↘	0	↗ $+\infty$

$f(e)=(e^2)^2(\ln e-1)^2=0$ $f(\sqrt{e})=\left(\sqrt{e}^2\right)^2(\ln\sqrt{e}-1)^2=\frac{e^2}{4}$

4 - Étudions le signe de $f''(x)$ sur $]0;+\infty[$.
On a $(\forall x\in]0;+\infty[):2x^2>0$ donc le signe de $f''(x)$ est le signe de $(6\ln x-5)(lnx)$
$(6\ln x-5)(lnx)=0\Leftrightarrow 6\ln x-5=0 ou lnx=0$
$\Leftrightarrow \ln x=\frac{5}{6} ou x=1$
$\Leftrightarrow x=e^{\frac{5}{6}} ou x=1$

Si : $x>e^{\frac{5}{6}}\Leftrightarrow \ln x>\ln(e^{\frac{5}{6}})(carla fonction x\mapsto lnx est strictement croissante)$
$\Leftrightarrow \ln x>\frac{5}{6}\Leftrightarrow 6\ln x>5\Leftrightarrow 6\ln x-5>0$

Si : $x<e^{\frac{5}{6}}\Leftrightarrow \ln x<\ln(e^{\frac{5}{6}})(carla fonction x\mapsto lnx est strictement croissante)$
$\Leftrightarrow \ln x<\frac{5}{6}\Leftrightarrow 6\ln x<5\Leftrightarrow 6\ln x-5<0$

Si : $x<1\Leftrightarrow \ln x<\ln(1)(carla fonction x\mapsto lnx est strictement croissante)$
$\Leftrightarrow \ln x<0$

Si : $x>1\Leftrightarrow \ln x>\ln(1)(carla fonction x\mapsto lnx est strictement croissante)$
$\Leftrightarrow \ln x>0$

Donc le tableau de signe de $f''(x)$ est :

x	0		1		$e^{\frac{5}{6}}$		$+\infty$
$6\ln x-5$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
lnx	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

En déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion. D'après le tableau de signe de $f''(x)$ on a f'' s'annule en 1 et $e^{\frac{5}{6}}$ et aussi change le signe, donc les points A et B d'abscisses respective 1 et $e^{\frac{5}{6}}$ sont des points d'inflexions.

5 - a) Construisons la courbe (C) dans le repère $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

b) En utilisant la courbe (C), déterminons le nombre de solutions de l'équation (E) : $x^2(\ln x-1)=-1$
L'équation (E) est définie si $x>0$ et $\ln x-1<0$ c'est à dire $x\in\,]0,e[$

$$x^2(\ln x-1)=-1 \Leftrightarrow x^4(\ln x-1)^2=1$$
$$\Leftrightarrow f(x)=1$$

Alors $(\forall x\in\,]0,e[)$ on a d'après la courbe (C) on a la droite $y=1$ coupe la courbe (C) en deux points.
Donc le nombre de solutions de l'équation (E) : $x^2(\ln x-1)=-1$ est 2.

6 - On considère la fonction g définie sur par $g(x)=f(|x|)$

a) Montrons que la fonction g est paire. •$\forall x\in\mathbb{R}$ on a $\forall -x\in\mathbb{R}$ car les éléments de $\mathbb{R}$ sont symétriques par rapport à 0 (1)
•$\forall x\in\mathbb{R}$, $g(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=g(x)$ (2)
D'après (1) et (2) g est une fonction paire.

b) Construire $\left(C_g\right)$ la courbe représentative de g dans le même repère $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$
Sur l'intervalle $[0;+\infty[$ on a : $|x|=x$ donc $g(x)=f(x)$ alors $\left(C_g\right)$ et (C) sont confondus.
Sur l'intervalle $]-\infty;0]$, $\left(C_g\right)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (voir la figure).

7 - a) on pose $\begin{cases} u'(x)=x^4 \\ v(x)=\ln x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x)=\frac{x^5}{5} \\ v'(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$ alors :

$$\begin{aligned}
I &= \left[\frac{x^5}{5}(\ln x - 1)\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{x^5}{5} dx \\
&= \left[\frac{x^5}{5}(\ln x - 1)\right]_1^e - \left[\frac{x^5}{25}\right]_1^e \\
&= \left[\frac{x^5}{5}(\ln x - 1) - \frac{x^5}{25}\right]_1^e \\
&= \frac{e^5}{5}(\ln e - 1) - \frac{e^5}{25} - \left(\frac{1^5}{5}(\ln 1 - 1) - \frac{1^5}{25}\right) \\
&= \frac{e^5}{5}(1-1) - \frac{e^5}{25} - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{25}\right) \\
&= -\frac{e^5}{25} + \frac{6}{25} \\
&= \frac{6-e^5}{25}
\end{aligned}$$

Donc : I $= \frac{6-e^5}{25}$.

b) On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x) = x^5(\ln x - 1)^2$
Vérifions que $h'(x) = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)$.
On a $(\forall x \in]0;+\infty[) : h(x) = x \times x^4(\ln x - 1)^2 = xf(x)$
h est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme le produit de deux fonctions dérivables.

$$\begin{aligned}
&(\forall x \in]0;+\infty[) : h'(x) = 5x^4(\ln x - 1)^2 + 2x^5 \times \frac{1}{x}(\ln x - 1) \\
&= 5x^4(\ln x - 1)^2 + 2x^4(\ln x - 1) \\
&= 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)
\end{aligned}$$

Donc : $h'(x) = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)$.

c) En déduire que $\int_1^e f(x)dx = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}I$ On a $(\forall x \in]0;+\infty[) : h'(x) = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1) \Leftrightarrow f(x) = \frac{h'(x)}{5} - \frac{2x^4(\ln x - 1)}{5}$,alors :

$$\begin{aligned}
&\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{h'(x)}{5} - \frac{2x^4(\ln x - 1)}{5} dx \\
&= \frac{1}{5}\int_1^e h'(x)dx - \frac{2}{5}\int_1^e x^4(\ln x - 1)\,dx \\
&= \frac{1}{5}[h(x)]_1^e - \frac{2}{5}I \\
&= \frac{1}{5}[h(e) - h(1)] - \frac{2}{5}I \\
&= \frac{1}{5}\left(e^5(\ln e - 1)^2 - 1^5(\ln 1 - 1)^2\right) - \frac{2}{5}I \\
&= \frac{1}{5}\left(e^5(1-1)^2 - 1\right) - \frac{2}{5}I \\
&= -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}I
\end{aligned}$$

Donc : $\int_1^e f(x)dx = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}I$

d) Calculons l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. On a : $A = \int_1^e |f(x)|\,dx \times u.a = = \int_1^e f(x)dx \times u.a$ car $(\forall x \in [1;e]) : f(x) \geq 0$ donc :

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^e f(x)dx \times u.a \\
&= \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}I\right) \times 1cm^2 \\
&= \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{6-e^5}{25}\right)\right) cm^2
\end{aligned}$$

Donc l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est : A $= \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\left(\frac{6-e^5}{25}\right)\right) cm^2$