Exercice 1 — Session : NORMAL 2022 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(0,1,1)$, $B(1,2,0)$ et $C(-1,1,2)$ et (E ;2 ;4)7

0.5 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{k}$

0.25 pt **b)** En déduire que $x + z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

2 - Soit (S) la sphère de centre $\Omega(1,1,2)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$.

0.5 pt Déterminer une équation de la sphère (S).

0.5 pt **3 -** Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A.

4 - On considère la droite (Δ) passant par le point C et perpendiculaire au plan (ABC)

0.25 pt **a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

0.5 pt **b)** Montrer que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) en un point D dont on déterminera les coordonnées.

0.5 pt **c)** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\left(\vec{i} + \vec{k}\right)$, puis en déduire la distance $d(A,(\Delta))$

Exercice 2 — Session : NORMAL 2022 — 3 Pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a = -1 - i\sqrt{3}$, le point B d'affixe $b = -1 + i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$

0.5 pt **1 -** Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d = -2$

2 - On considère la rotation R de centre D et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

0.5 pt Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c = -4$

0.5 pt **3 - a)** Écrire le nombre $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique

0.5 pt **b)** En déduire que $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$

4 - Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2, (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartient aux deux cercles (Γ) et (Γ')

0.25 pt **a)** Vérifier que $|z+2| = 2$

0.5 pt **b)** Prouver que $z + \bar{z} = -8$ (remarquer que $|z| = 4$)

0.25 pt **c)** En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera

Exercice 3 — Session : NORMAL 2022 — 3 Pts

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, trois boules vertes et quatre boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasared simultanément trois boules de l'urne.

0.75 pt **1 -** Montrer que $p(A) = \frac{1}{6}$; où A est l'évènement **"N'obtenir aucune boule rouge"**

0.75 pt **2 -** Calculer $p(B)$; où B est l'évènement **"Obtenir trois boules blanches ou trois boules vertes"**

0.75 pt **3 -** Montrer que $p(C) = \frac{1}{2}$; où C est l'évènement **"Obtenir exactement une boule rouge"**

0.75 pt **4 -** Calculer (D) ; où D est l'évènement **"Obtenir au moins deux boules rouges"**

Exercice 4 — Session : NORMAL 2022 — 2.5 Pts

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x+1)\,e^x$

0.75 pt **1 - a)** Vérifier que $x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$; puis calculer $I = \int_{-1}^{0} h(x)\,dx$

0.75 pt **b)** A l'aide d'une intégration par partie calculer $J = \int_{-1}^{0} (x+1)^2\,e^x\,dx$

0.5 pt **2 - a)** Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = 0$

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction h est la solution de (E) qui vérifie les conditions $h(0) = 1$ et $h'(0) = 2$

Exercice 5 — Session : NORMAL 2022 — 8.5 Pts

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.
Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ (unité : 1 cm)

0.5 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

0.5 pt **2 -** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat

0.5 pt **3 - a)** Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

0.75 pt **b)** Étudier le signe de $(f(x) - x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ)

0.5 pt **4 - a)** Montrer que $f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 + xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

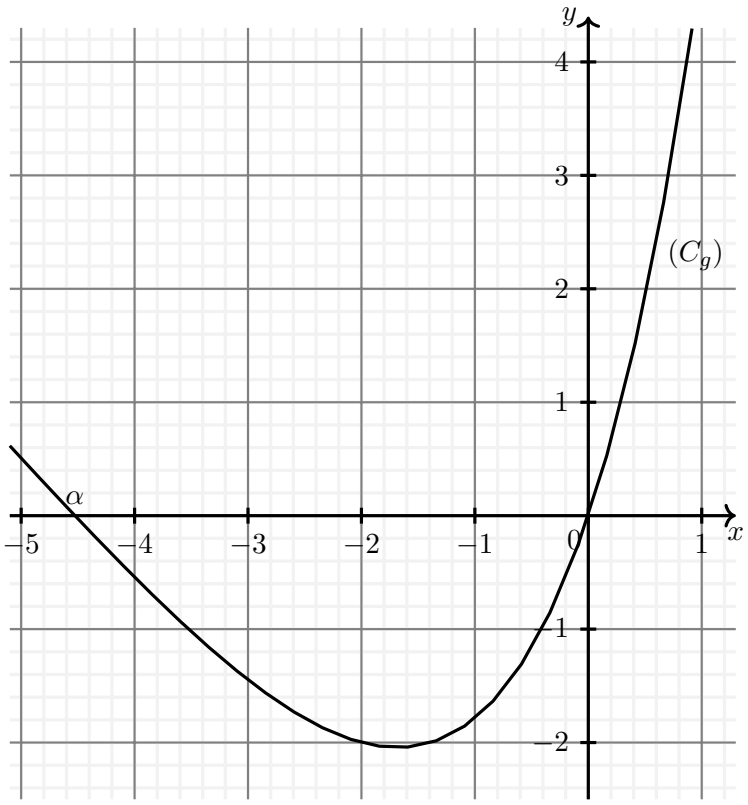
0.5 pt **b)** Vérifier que $x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$

0.25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

0.5 pt **5 - a)** Montrer que $f''(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} g(x)$
où $g(x) = (2x+4)\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 4$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.5 pt **b)** A partir de la courbe ci-après (page suivante) de la fonction g, déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (Remarque : $g(\alpha) = 0$)

0.5 pt **c)** Étudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions.



1 pt **6 -** Construire la courbe (C) dans le repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$
(On prend : $\ln(4) \simeq 1,4$; $\alpha \simeq -4,5$ et $f(\alpha) \simeq -3,5$)

0.5 pt **7 - a)** Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

0.25 pt **b)** Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln(4))$

8 - Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **a)** Montrer par récurrence que $0 < u_n < \ln(4)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante

0.25 pt **c)** En déduire que la suite (u_n) est convergente

0.5 pt **d)** Calculer la limite de la suite (u_n)

FIN