Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2022 — 3 Pts

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 2$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n > 1$

0,75 pt **b)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(\mathcal{U}_n - 1)$ et déduire que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante et convergente

2 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 1$

0,5 pt **a)** Montrer que $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son première terme

0,5 pt **b)** Écrire $\mathcal{U}_n$ en fonction de n puis déduire la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)$

0,25 pt **c)** Calculer la somme $S = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots\cdots + \mathcal{U}_{2021}$

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2022 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(1,-1,1)$ et $B(5,1,-3)$. Soit (S) la sphère de center $\Omega(3,0,-1)$ de rayon $R = 3$, et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-2,1)$

0,25 pt **1 - a)** Calculer la distance ΩA

0,5 pt **b)** Montrer que la droite (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires

0,25 pt **c)** Déduire la position relative de la droite (Δ) et la sphère (S)

0,5 pt **2 -** Soit le point $M_a(2a-3, 3-2a, a-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}$ et déduire que $M_a \in (\Delta)$ pour tout $M_a \in \mathbb{R}$

0,5 pt **3 - a)** Vérifier que $2x - 2y + z - 9a + 13 = 0$ est une équation du plan (P_a) passant par M_a et perpendiculaire à la droite (Δ)

0,5 pt **b)** Montrer que $d(\Omega, (P_a)) = |3a - 6|$

0,5 pt **c)** Déterminer les deux valeurs de a pour lesquelles le plan (P_a) est tangent à la sphère (S)

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2022 — 3 Pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1 + 5i$, $Z_B = 1 - 5i$ et $Z_C = 5 - 3i$

0,25 pt **1 -** Déterminer le nombre complexe Z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$

2 - Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

0,5 pt Déterminer le nombre complexe Z_E affixe du point E l'image de B par h

3 - On considère la rotation R de centre C et d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$

0,5 pt déterminer l'image de B par la rotation R

4 - Soit F le point d'affixe $Z_F = -1 + i$

0,25 pt **a)** Vérifier que $\frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$

0,5 pt **b)** En déduire que $\overline{(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})} + \overline{(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})} \equiv \pi[2\pi]$

0,5 pt **c)** Déterminer la forme trigonométrique du nombre $\frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}$ et déduire la nature du triangle AEF

0,5 pt **d)** Déduire que les points A, D, E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2022 — 3 Pts

Une urne contient *trois* boules blanches, et *quatre* boules rouges et *cinq* boules vertes, indiscernables au toucher, on tire au hasard et simultanément **trois** boules de l'urne

1 - On considère les événements suivantes :

A : "Obtenir exactement *deux* boules rouges"

B:" Obtenir exactement *une* boule verte"

0,75 pt **a)** Montrer que : $P(A) = \frac{12}{55}$ et $P(B) = \frac{21}{44}$

0,75 pt **b)** Calculer $P(A/B)$, la probabilité de l'événement A Sachant que l'événement B est réalisé. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2 - Soit la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées

1 pt **a)** Déterminé la loi de probabilité de X

0,5 pt **b)** Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2022 — 8.5 Pts

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^4(\ln x - 1)^2; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : $1cm$)

0,75 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis détermine la branche infinie de $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$

0,5 pt **2 - a)** Montrer que f est continue à droite en 0

0,5 pt **b)** Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter le résultat géométriquement

0,75 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$

0,5 pt **b)** Dresser le tableau de variations de f

0,5 pt **4 - a)** Sachant que $f''(x) = 2x^2(6\ln x - 5)\ln x$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0, +\infty[$

0,5 pt **b)** Déduire que la courbe $(\mathcal{C})$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses

1 pt **5 - a)** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, (on prend : $\sqrt{e} \simeq 1,6$ et $e^2 \simeq 7,2$)

0,5 pt **b)** En utilisant la courbe $(\mathcal{C})$, déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2(\ln x - 1) = -1$

6 - On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|)$

0,5 pt **a)** Montrer que la fonction g est paire

0,5 pt **b)** Construire $(\mathcal{C}_g)$ la courbe représentative de g dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0,5 pt **7 - a)** On pose $I = \int_1^e x^4(\ln x - 1)dx$, en utilisant une intégration par parties, montrer que $I = \dfrac{6 - e^5}{25}$

0,5 pt **b)** On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $h(x) = x^5(\ln x - 1)^2$.

Vérifier que $h'(x) = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)$

0,5 pt **c)** Déduire que $\int_1^e f(x)dx = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}I$

0,5 pt **d)** Calculer l'aire du domine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}$

FIN