ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2023

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2u_n + 5}$

0.5 **1 -** Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > -1$

Raisonnons par récurrence

✓ Pour $n = 0$; on a $u_0 = 0 > -1$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$

✓ Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n > -1$ est montrons que $u_{n+1} > -1$

$u_{n+1} - (-1) = u_{n+1} + 1 = \dfrac{u_n - 2}{2u_n + 5} + 1 = \dfrac{u_n - 2 + 2u_n + 5}{2u_n + 5} = \dfrac{3u_n + 3}{2u_n + 5} = \dfrac{3(u_n + 1)}{2u_n + 5}$

Or d'après l'hypothèse on a $u_n > -1$ donc $u_n + 1 > 0$ et $2u_n > -2$

Donc $3(u_n + 1) > 0$ et $2u_n + 5 > 3 > 0$, d'où : $u_{n+1} + 1 > 0$ c.à.d. $u_{n+1} > -1$

✓ D'après le principe de la récurrence on a $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > -1$

0.5 **2 -** Montrons que la suite (u_n) est décroissante, puis déduisons que (u_n) est convergente

✍ Montrons que la suite (u_n) est décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n - 2 - 2u_n^2 - 5u_n}{2u_n + 5} - u_n = \dfrac{u_n - 2}{2u_n + 5} = \dfrac{-2u_n^2 - 4u_n - 2}{2u_n + 5} = \dfrac{-2(u_n + 1)^2}{2u_n + 5} < 0$

Donc u_n est décroissante

✍ Déduisons que (u_n) est convergente

(U_n) est décroissante est minorée par -1, donc (u_n) est convergente

3 - On pose $v_n = \dfrac{3}{1 + u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 **a)** Montrons que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 puis déterminons son premier terme

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3}{1+u_{n+1}} - \dfrac{3}{1+u_n}$, or $1 + u_{n+1} = u_{n+1} + 1 = \dfrac{3(u_n+1)}{2u_n+5}$

Donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{3}{\dfrac{3(u_n+1)}{2u_n+5}} - \dfrac{3}{1+u_n} = \dfrac{2u_n+5}{u_n+1} - \dfrac{3}{1+u_n} = \dfrac{2u_n+5-3}{u_n+1} = \dfrac{2(u_n+1)}{u_n+1} = 2$

D'où (v_n) est une suite arithmétique de raison 2

et de premier terme : $v_0 = \dfrac{3}{1+u_0} = \dfrac{3}{1+0}$

$v_0 = 3$

0.5 **b)** Exprimons u_n en fonction de n , pour tout n de $\mathbb{N}$ et déduisons la limite de (u_n)

✍ Exprimons u_n en fonction de n, pour tout n de $\mathbb{N}$

Soit n de $\mathbb{N}$

On a (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = 3$ _ Donc son terme général s'écrit : $v_n = v_0 + rn = 3 + 2n$

Or $v_n = \dfrac{3}{1+u_n}$ donc $1 + u_n = \dfrac{3}{v_n}$ c.à.d. $u_n = \dfrac{3}{v_n} - 1$

D'où $u_n = \dfrac{3}{3+2n} - 1$

✍ Déduisons la limite de (u_n)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{3+2n} - 1\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$

Car $\lim\limits_{n\to+\infty} (3+2n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{3+2n} = 0$

4 - On pose $w_n = \mathbf{e}^{3-v_n}$ et $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 **a)** Montrons que (w_n) est une suite géométrique et déterminons sa raison et son premier terme

On a $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = 2n + 3$, donc : $w_n = \mathbf{e}^{3-(2n+3)} = \mathbf{e}^{3-2n-3} = \mathbf{e}^{-2n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

On a $w_{n+1} = \mathbf{e}^{-2(n+1)} = \mathbf{e}^{-2n-2} = \mathbf{e}^{-2n}\mathbf{e}^{-2} = \mathbf{e}^{-2}\mathbf{e}^{-2n} = \mathbf{e}^{-2}w_n$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $q = \mathbf{e}^{-2}$

Et de premier terme : $w_0 = \mathbf{e}^{-2\times 0} = \mathbf{e}^0 = 1$

0.5 **b)** Calculons la limite de la somme S_n

S_n est la somme de n termes successifs d'une suite géométrique (w_n) de raison $q = \mathbf{e}^{-2}$ et de premier terme $w_0 = 1$

Donc : $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n = w_0 \times \left[\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right] = 1 \times \left[\dfrac{1-(\mathbf{e}^{-2})^{n+1}}{1-\mathbf{e}^{-2}}\right] = \dfrac{1-(\mathbf{e}^{-2})^{n+1}}{1-\mathbf{e}^{-2}}$

Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-(\mathbf{e}^{-2})^{n+1}}{1-\mathbf{e}^{-2}}$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{1-\mathbf{e}^{-2}}$

Car $-1 < \mathbf{e}^{-2} < 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathbf{e}^{-2})^{n+1} = 0$

Exercice 2 : (3 pts)

L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, soient les points $A(2;1;2)$, $B(-2;0;5)$, $C(4;-5;7)$ et $\Omega(1;-1;0)$

Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon $R = 3$

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}$

0.5 **1 - a)** Montrons que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{u}$ et déduisons que les points A, B et C ne sont pas alignés

On a : $\overrightarrow{AB}(4;-1;3)$ et $\overrightarrow{AC}(2;-6;5)$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -6 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (-5+18)\vec{i} - (-20-6)\vec{j} + (24+2)\vec{k}$$

$$= 13\vec{i} + 26\vec{j} + 26\vec{k}$$

$$= 13\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$$

On a $\overrightarrow{\Omega A}(2-1;1-(-1);2-0)$

Donc $\overrightarrow{\Omega A}(1;2;2)$ Alors $\vec{u}(1;2;2)$ par conséquence : $\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{u}}$

On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{O}$, donc $\boxed{\text{les points } A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}}$

0.25 **b)** Vérifions que $x + 2y + 2z - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

L'équation cartésienne du plan (ABC) s'écrit : $(ABC) : ax + by + cz + d = 0$

Et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1;2;2)$ est un vecteur normal au plan (ABC), donc $(ABC) : x+2y+2z+d = 0$

Or $A \in (ABC)$, donc $x_A + 2y_A + 2z_A + d = 0$, c.à.d. $2 + 2 + 4 + d = 0$, donc $d = -8$

Par conséquence $\boxed{(ABC) \ : \ x + 2y + 2z - 8 = 0}$

0.5 **c)** Montrons que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

On a $d(\Omega;(ABC)) = \dfrac{|x_\Omega + 2y_\Omega + 2z_\Omega - 8|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \dfrac{|1 + 2\times(-1) + 2\times 0| - 8}{\sqrt{9}} = \dfrac{|1-2-8|}{3} = \dfrac{|-9|}{3} = 3 = R$

Donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

Et puisque $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}$ est un vecteur normal au plan (ABC), alors A est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC) Donc $\boxed{(ABC) \text{ est tangent à } (S) \text{ au point } A}$

2 - Soient (P) le plan d'équation $3x+4y+z+1 = 0$ et (Δ) la droite passant par A et orthogonale au plan (P)

0.5 **a)** Montrons que (Δ) coupe (P) au point $H\left(\dfrac{1}{2}; -1; \dfrac{3}{2}\right)$

On a $(P) : 3x + 4y + z + 1 = 0$, donc $\vec{v}(3;4;1)$ est un vecteur normal au plan (P)

Et puisque $(P) \perp (\Delta)$, donc $\vec{v}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) passant par

$A(2;1;2)$

Donc une représentation paramétrique de (Δ) s'écrit : $(\Delta):\begin{cases} x=2+3t \\ y=1+4t \ ; \ t\in\mathbb{R} \\ z=2+t \end{cases}$

$M(x;y;z)\in(\Delta)\cap(P)\Leftrightarrow\begin{cases} 3x+4y+z+1=0 \\ x=2+3t \\ y=1+4t \ ; \ t\in\mathbb{R} \\ z=2+t \end{cases}$

$\Leftrightarrow 3(2+3t)+4(1+4t)+2+t+1=0\Leftrightarrow 26t+13=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{2}$

Donc (Δ) coupe (P) en un seul point H de coordonnées : $\begin{cases} x_H=2+3\times\dfrac{-1}{2}=\dfrac{1}{2} \\ y_H=1+4\times\dfrac{-1}{2}=-1 \\ z_H=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

D'où $H(\frac{1}{2};-1;\frac{3}{2})$ est le point d'intersection de (Δ) et (P)

0.5 **b)** Déterminons les coordonnées de D tel que H soit milieu de $[AD]$

H est le milieu du segment $[AD]$

Donc : $x_H=\dfrac{x_A+x_D}{2}$ et $y_H=\dfrac{y_A+y_D}{2}$ et $z_H=\dfrac{z_A+z_D}{2}$

Donc : $\dfrac{1}{2}=\dfrac{2+x_D}{2}$ et $-1=\dfrac{1+y_D}{2}$ et $\dfrac{3}{2}=\dfrac{2+z_D}{2}$

Donc : $1=2+x_D$ et $-2=1+y_D$ et $3=2+z_D$

Donc : $x_D=-1$ et $y_D=-3$ et $z_D=1$

Alors $D(-1;-31)$

3 - Soit (Q) le plan passant D et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}$

0.25 **a)** Montrons que le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en D

On a $\overrightarrow{\Omega D}$ est un vecteur normal au plan (Q) et $D\in(Q)$, alors $d(\Omega,(Q))=\Omega D$

Et puisque : $\Omega D=\sqrt{(-1-1)^2+(-3+1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$

Donc $d(\Omega,(Q))=\Omega D=3=R$ donc le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en D

(car D est le projeté orthogonal de Ω sur (Q))

0.5 **b)** Montrons que les plans (Q) et (ABC) se coupent suivant la droite (BC)

On a le plan (ABC) est de vecteur normal $\vec{u}(1;2;2)$, et le plan (Q) est de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}(-2;-2;1)$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (car il nexiste pas de réel k tel que $\vec{u}=k\overrightarrow{\Omega D}$)

Donc les plan (Q) est (ABC) sont sécantes

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace

$M \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{MD}.\overrightarrow{\Omega D} = 0 \Leftrightarrow -2(-1-x) - 2(-3-y) + 1 - z = 0$

$\Leftrightarrow 2 + 2x + 6 + 2y + 1 - z = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 2y + z + 9 = 0$ (c'est une équation cartésienne de (Q))

Montrons que $B \in (Q)$ et $C \in (Q)$

On a $2x_B + 2y_B + z_B + 9 = -4 + 0 - 5 + 9 = 0$, et $2x_C + 2y_C + z_C + 9 = 8 - 10 - 7 + 9 = 0$

W Donc $B \in (Q)$ et $C \in (Q)$

Et puisque B et C sont deux points distincts appartiens au plans (ABC) et (Q)

Alors les plans (Q) et (ABC) se coupent suivant la droite (BC)

Exercice 3 : (3 pts)

1 - On considère le nombre complexe : $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

0.25 **a)** Montrons que $a = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

On a : $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$, donc $|a| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right) + \left(\dfrac{9}{4}\right)} = \sqrt{\left(\dfrac{12}{4}\right)} = \sqrt{3}$

D'où : $a = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{3}{2\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Donc : $a = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

0.25 **b)** Déduisons que a^{2022} est un nombre réel

On a : $a = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$, donc $a^{2022} = \left[\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\right]^{2022}$

$a^{2022} = \sqrt{3}^{2022}\left(\cos\dfrac{2022\pi}{3} + i\sin\dfrac{2022\pi}{3}\right)$

$a^{2022} = \left(\sqrt{3}^2\right)^{1011}(\cos 674\pi + i\sin 674\pi)$

$a^{2022} = 3^{1011}(1 + i \times 0) = 3^{1011} \in \mathbb{R}$

Donc a^{2022} est un nombre réel

2 - On considère les points $A(a)$ et $B(\bar{a})$ dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

0.5 Déterminons une mesure de l'angle de la rotation R de centre O et qui transforme B en A

R est la rotation de centre O et d'angle θ et qui transforme B en A

Donc : $R(B) = A$ signifie $z_A - z_O = \mathbf{e}^{i\theta}(z_B - z_O)$

donc $\dfrac{z_A}{z_B} = \mathbf{e}^{i\theta}$, c.à.d. $\dfrac{a}{\bar{a}} = \mathbf{e}^{i\theta}$, donc $\dfrac{\sqrt{3}\mathbf{e}^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{3}\mathbf{e}^{-i\frac{\pi}{3}}} = \mathbf{e}^{i\theta}$, donc $\mathbf{e}^{i\frac{\pi}{3}+i\frac{\pi}{3}} = \mathbf{e}^{i\theta}$, donc $\mathbf{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = \mathbf{e}^{i\theta}$

Donc $\dfrac{2\pi}{3}$ est une mesure de l'angle de la rotation R

3 - Considérons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_\alpha) : z^2 - \sqrt{3}z + \alpha = 0$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq 0$

Soient z et $\bar{z}$ les deux racines complexes conjuguées de l'équation E_α

Soient les points $M(z)$, $N(\bar{z})$ et $P(\sqrt{3})$ du plan complexe

0.5 **a)** Justifions que $\alpha > \frac{3}{4}$ et que $\alpha = z\bar{z}$

Pour que l'équation (E_α) admet deux racines complexes conjuguées, il faut que son discriminant Δ soit strictement inférieur à 0, c.à.d. $\Delta < 0$

c.à.d. $(-\sqrt{3})^2 - 4\alpha < 0$, donc $3 - 4\alpha < 0$, donc $3 < 4\alpha$

Alors : $\boxed{\alpha > \frac{3}{4}}$

Et on a $\boxed{z\bar{z} = \frac{\alpha}{1} = \alpha}$ (le produit des solutions z_1 et z_2 d'une équation de deuxième degré de type $az^2 + bz + c = 0$ est égale à $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$)

0.5 **b)** Montrons que : $|z| = |z - \sqrt{3}|$

L'équation (E_α) admet deux solutions z et $\bar{z}$

Alors $z + \bar{z} = \frac{-(-\sqrt{3})}{1} = \sqrt{3}$ (la somme des solutions z_1 et z_2 d'une équation de deuxième degré de type $az^2 + bz + c = 0$ est égale à $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$)

D'où : $\bar{z} = \sqrt{3} - z$, donc $|\bar{z}| = |\sqrt{3} - z|$

Et comme $|\bar{z}| = |z|$ et $|\sqrt{3} - z| = |\sqrt{3} - z|$

Donc $\boxed{|z| = |z - \sqrt{3}|}$

0.5 **c)** Déduisons que M et N appartiennent à (Δ) la médiatrice de $[OP]$

On a $|z| = |z - \sqrt{3}|$ alors $OM = PM$, donc $M \in (\Delta)$

Et on a $|z| = |z - \sqrt{3}|$, donc $OM = PM$, alors M appartient à la médiatrice (Δ) du segment $[OP]$

Et on a $|z| = |z - \sqrt{3}|$ donc $|\bar{z}| = |z - \bar{\sqrt{3}}|$, donc $|\bar{z}| = |\bar{z} - \sqrt{3}|$ donc $ON = NP$, alors N appartient à la médiatrice (Δ) du segment $[OP]$

Finalement $\boxed{M \text{ et } N \text{ appartiennent à la médiatrice } (\Delta) \text{ du segment } [OP]}$

0.5 **d)** Déterminons la valeur de α pour laquelle $|z - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$ et déduisons dans ca cas les points d'intersection de (Δ) et le cercle de centre P et de rayon $\sqrt{3}$

✍ On a $|z - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$ et on a $|z| = |z - \sqrt{3}|$, donc $|z| = \sqrt{3}$

Et puisque $\alpha = z\bar{z}$ et $z\bar{z} = |z|^2$, donc $\alpha = |z|^2 = \sqrt{3}^2$

Donc $\boxed{\alpha = 3}$

✍ On a $M(z) \in (\Delta)$, donc $|z - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$, donc $|z_M - z_P| = \sqrt{3}$, donc $MP = \sqrt{3}$

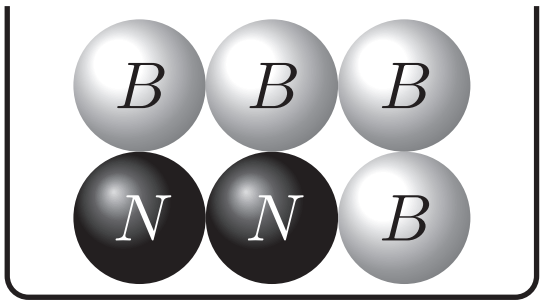
Et on a $N(\bar{z}) \in (\Delta)$, donc $|\bar{z} - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$, donc $|z_N - z_P| = \sqrt{3}$, donc $NP = \sqrt{3}$

D'où les points M et N appartiennent au cercle de centre P et de rayon $\sqrt{3}$

Par conséquence $\boxed{M \text{ et } N \text{ sont les pointes d'intersection de la droite } (\Delta) \text{ et le cercle de centre } P \text{ et de rayon } \sqrt{3}}$

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient *quatre* boules blanches et *deux* boules noires, indiscernables au toucher



Dans cette exercice, on va utiliser les combinaisons C_n^p

1 - On tire au hasard et simultanément *deux* boules de l'urne

On a $Card(\Omega) = C_6^2 = \dfrac{6!}{2!(6-2)!} = \dfrac{6!}{2!4!} = \dfrac{6\times 5\times 4!}{2!4!} = \dfrac{30}{2} = 15$

0.5 **a)** Calculons la probabilité de l'événement A : " Tirer au moins une boule noire "

L'événement A est équivalent a tirer deux boules noires ou une boule noir et une boule blanche

$p(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{C_2^1C_4^1 + C_2^2}{15} = \dfrac{2\times 4+1}{15} = \dfrac{9}{15}$

Donc $\boxed{p(A) = \dfrac{3}{5}}$

0.5 **b)** Soit l'événement B : " Obtenir *deux* boules de même couleur ". Montrer que $p(B) = \dfrac{7}{15}$

L'événement B est équivalent a tirer deux boules noires ou deux boule blanches

$p(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{C_2^2 + C_4^2}{15} = \dfrac{1+6}{15}$

Donc $\boxed{p(B) = \dfrac{7}{15}}$

c) On répète cette expérience **cinq** fois en remettant dans l'urne les boules tirées, après chaque tirage

0.5 Quelle est la probabilité pour que l'événement B soit réalisé trois fois

On va utiliser une variable aléatoire binomiale Y de paramètres $n = 5$ et $p = 3$

$p(Y=3) = C_5^3 p(B)^3(1-p(B))^2 = 10\times\left(\dfrac{7}{15}\right)^3\left(1-\dfrac{7}{15}\right)^2$

$p(Y=3) = 10\times\left(\dfrac{7}{15}\right)^3\left(\dfrac{8}{15}\right)^2 = \dfrac{10\times 7^3\times 8^2}{15^3\times 15^2}$

Donc $\boxed{p(Y=3) = \dfrac{43904}{158875}}$

2 - Dans cette question, on tire des boules de l'urne, une après l'autre et sans remise et on arrête le tirage lorsqu'on obtient une boule *blanche* pour la première fois

Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de tirages effectués dans cette expérience

0.25 **a)** Justifions que les valeurs prises par X sont : 1 ; 2 et 3

➥ Si la première boule tirée est blanche, on arrête donc l'expérience au premier tirage, donc X peut avoir la valeur 1

➥ Si la première boule tirée est noire et la seconde est blanche, on arrête donc l'expérience au deuxième tirage, donc X peut avoir la valeur 2

➥ Si les deux premières boules tirées sont noire, et la troisième est blanche, on arrête donc l'expérience au troisième tirage, donc X peut avoir la valeur 3

D'où : $\boxed{X(\Omega) = \{1; 2; 3\}}$

0.25 **b)** Montrons que $p(X = 2) = \dfrac{4}{15}$

$X = 2$ signifie que la première boule tirée est noire et la seconde boule tirée est blanche

$p(X = 2) = \dfrac{A_2^1 A_4^1}{A_6^2} = \dfrac{2 \times 4}{30} = \dfrac{8}{30}$, donc $\boxed{p(X = 2) = \dfrac{4}{15}}$

0.5 **c)** Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X

➠ $X = 1$ signifie que la première boule tirée est blanche : $p(X = 1) = \dfrac{A_4^1}{A_6^1} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

➠ $X = 2$ signifie que la première boule tirée est noire et la seconde boule tirée est blanche : $p(X = 2) = \dfrac{4}{15}$

➠ $X = 3$ signifie que les deux premières boules tirées sont noires et la troisième boule tirée est blanche : $p(X = 3) = \dfrac{A_2^1}{A_6^1} \times \dfrac{A_1^1}{A_5^1} \times \dfrac{A_4^1}{A_4^1} = \dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{5} \times \dfrac{1}{1} = \dfrac{2}{30} = \dfrac{1}{15}$

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$

0.5 **d)** Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule noire ?

La probabilité d'obtenir au moins une boule noire c'est équivalente à avoir une ou deux boules noires, c.à.d. $X = 2$ ou $X = 3$

Donc $p = p(X = 2) + p(X = 3) = \dfrac{4}{15} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{5}{15}$

Alors $\boxed{p = \dfrac{1}{3}}$

Problème : (8 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 \mathbf{e}^{x(2-x)} \ ; \ x \leq 2 \\ f(x) = 1 + (x-2)^2 \ln(x-2) \ ; \ x > 2 \end{cases}$

Soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité : 1 cm)

0.5 **1 -** Montrons que la fonction f est continue au point 2

On a f est continue à gauche de 2 et on a $f(2) = 1$

Et on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} (1 - (x-2)^2 \ln(x-2))$

On pose : $X = x - 2$ (si $x \to 2^+$ alors $X \to 0^+$)

On obtient : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} = \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X>0}} (1 - X^2 \ln X) = 1 = f(2)$ (car $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^n \ln x = 0$)

D'où f est continue à droite de 2

Par suite f est continue au point 2

0.25 **2 - a)** Vérifions que pour tout $x < 2$ et $x \neq 0$; $\dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = x\mathbf{e}^{x(2-x)} - x.\dfrac{\mathbf{e}^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)}$

Soit x un réel non nul tel que : $x < 2$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} &= \frac{(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} - 1}{x-2} \\ &= \frac{x^2\mathbf{e}^{x(2-x)} - 2x\mathbf{e}^{x(2-x)} + \mathbf{e}^{x(2-x)} - 1}{x-2} \\ &= \frac{(x^2 - 2x)\mathbf{e}^{x(2-x)}}{x-2} + \frac{\mathbf{e}^{x(2-x)} - 1}{x-2} \\ &= \frac{x(x-2)\mathbf{e}^{x(2-x)}}{x-2} - x.\frac{\mathbf{e}^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)} \\ &= x\mathbf{e}^{x(2-x)} - x.\frac{\mathbf{e}^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)} \end{aligned}$$

Donc $\dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} = x\mathbf{e}^{x(2-x)} - x.\dfrac{\mathbf{e}^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)}$

0.5 **b)** Montrons que f est dérivable à gauche en 2

$$\begin{aligned} \text{On a } \lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} &= \lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} x\mathbf{e}^{x(2-x)} - x.\frac{\mathbf{e}^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)} \\ &= 2\mathbf{e}^0 - 2(\text{car } \lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \frac{\mathbf{e}^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)} = 1 \text{on posant } X = x(2-x)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc f est dérivable à gauche en 2 et on a : $f'_g(2) = 0$

0.75 **c)** Montrons que f est dérivable en 2 et que $f'(2) = 0$ puis interpréter géométriquement le résultat

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} &= \lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \frac{1 + (x-2)^2 \ln(x-2) - 1}{x-2} \\ &= \frac{(x-2)^2 \ln(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} (x-2)\ln(x-2) \\ &= 0(\text{on posant } X = x-2)) \end{aligned}$$

On a

Donc f est dérivable à droite en 2 et on a : $f'_d(2) = 0$

Conclusion : f est dérivable à droite et à gauche en 2 et $f'_g(2) = f'_d(2) = 0$

Donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 0$

Par conséquence $(\mathcal{C})$ admet une tangente horizontale au point $I(2; f(2))$

0.25 **3 - a)** Vérifions que pour tout $x \leq 2$, $f(x) = x(x-2)\mathbf{e}^{x(2-x)} + \mathbf{e}^{x(2-x)}$

Soit $x \geqslant 2$

$$\begin{aligned} \text{On a } f(x) &= (x-1)^2\mathbf{e}^{x(2-x)} \\ &= x^2\mathbf{e}^{x(2-x)} - 2x\mathbf{e}^{x(2-x)} + \mathbf{e}^{x(2-x)} \\ &= (x^2-2x)\mathbf{e}^{x(2-x)} + \mathbf{e}^{x(2-x)} \end{aligned}$$

Donc $f(x) = x(x-2)\mathbf{e}^{x(2-x)} + \mathbf{e}^{x(2-x)}$

0.5 **b)** Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interprétons géométriquement le résultat

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x(x-2)\mathbf{e}^{x(2-x)} + \mathbf{e}^{x(2-x)}\right)$

On pose $X = x(2-x)$ (si $x \to -\infty$ alors $X \to -\infty$)

On obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} (-X\mathbf{e}^X + \mathbf{e}^X) = 0$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathbf{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^x = 0$)

Donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangent horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$

0.75 **c)** Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + (x-2)^2 \ln(x-2)\right) = +\infty$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x-2) = +\infty$)

Et on a $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 + (x-2)^2 \ln(x-2)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{(x-2)^2}{x} \ln(x-2)\right) = +\infty$

(car $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-2)^2}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x-2) = +\infty$)

Donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

0.5 **4 - a)** Montrons que pour tout $x < 2$, $f'(x) = 2x(x-1)(2-x)\mathbf{e}^{x(2-x)}$

Soit $x < 2$; on a $f(x) = (x-1)^2\mathbf{e}^{x(2-x)}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composé de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((x-1)^2\mathbf{e}^{x(2-x)}\right)' \\ &= \left((x-1)^2\right)' \mathbf{e}^{x(2-x)} + (x-1)^2 \left(\mathbf{e}^{x(2-x)}\right)' \\ &= 2(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} + (x-1)^2 \left(x(2-x)\right)' \mathbf{e}^{x(2-x)} \\ &= 2(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} + (x-1)^2(-2x+2)\mathbf{e}^{x(2-x)} \\ &= 2(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} - 2(x-1)^2(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} \\ &= (x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} \left(2 - 2(x-1)^2\right) \\ &= \left(2 - 2(x-1)^2\right)(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} \\ &= \left(2 - 2(x^2-2x+1)\right)(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} \\ &= (2 - 2x^2 + 4x - 2)(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} \\ &= (-2x^2 + 4x)(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)} \end{aligned}$$

Donc $f(x) = 2x(2-x)(x-1)\mathbf{e}^{x(2-x)}$

0.5 **b)** Montrons que pour tout $x > 2$, $f'(x) = (x-2)(1+2\ln(x-2))$

Soit $x \geqslant 2$; on a $f(x) = 1 + (x-2)^2 \ln(x-2)$

f est dérivable sur $]2;+\infty[$ comme produit et composé de fonctions dérivables sur $]2;+\infty[$

et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1+(x-2)^2\ln(x-2)\right)' \\ &= 0 + \left((x-2)^2\right)'\ln(x-2) + (x-2)^2\left(\ln(x-2)\right)' \\ &= 2(x-2)\ln(x-2) + (x-2)^2\frac{1}{x-2} \\ &= 2(x-2)\ln(x-2) + (x-2) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f'(x) = (x-2)(2\ln(x-2)+1)}$

0.5 **c)** Résolvons dans l'intervalle $]2;+\infty[$, l'inéquation $1+2\ln(x-2) \leq 0$

$$\begin{aligned} 1+2\ln(x-2) < 0 &\Leftrightarrow 2\ln(x-2) < -1 \\ &\Leftrightarrow \ln(x-2) < \frac{-1}{2} \\ &\Leftrightarrow x-2 < e^{\frac{-1}{2}} \\ &\Leftrightarrow x < e^{\frac{-1}{2}} + 2 \\ &\Leftrightarrow x < 2 + \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

Donc $S = \left]-\infty; 2+\frac{1}{\sqrt{e}}\right[\cap]2;+\infty[$

D'où $\boxed{S = \left]2; 2+\frac{1}{\sqrt{e}}\right[}$

0.75 **d)** Étudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dressons le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

➥ Sur l'intervalle $]-\infty;2[$ on a $(2-x)e^{x(2-x)} > 0$ et on a :

x	$-\infty$		0		1		2
$2x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Alors

x	$-\infty$		0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

➥ Sur l'intervalle $]2;+\infty[$ on a $x-2 > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $1+2\ln(x-2)$

et on a :

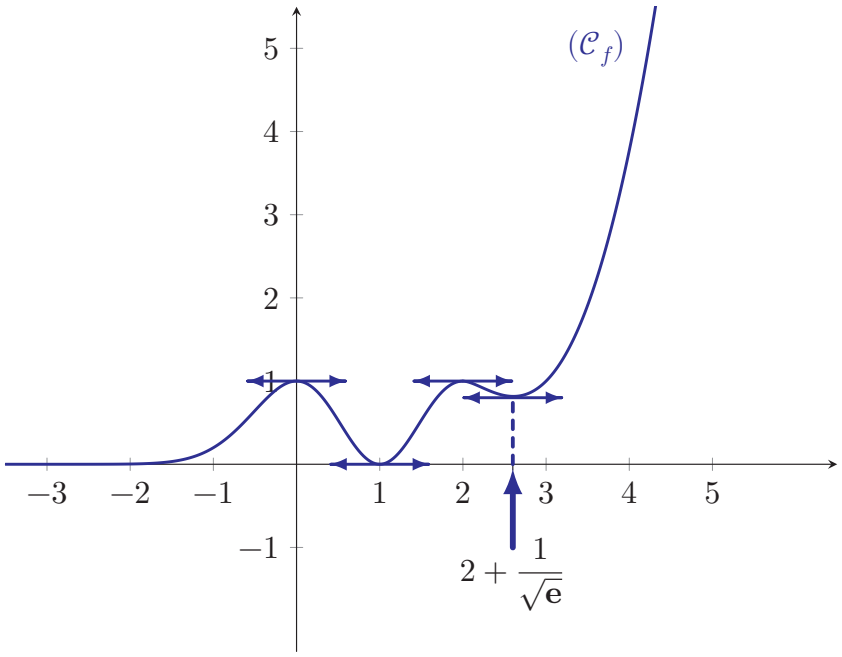
x	2		$2+\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$1+2\ln(x-2)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$		0		1		2		$2+\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	1	↘	0	↗	1	↘	$f\left(2+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	↗	$+\infty$

1 **5 -** Construisons la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

(On donne : $f(3)=1\,;\,2+\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 2.6$ et $f\left(2+\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\approx 0.8$)



6 - Soit $\lambda\in\,]2;3[$

0.5 **a)** Montrons, en utilisant une intégration par partie, que :

$$\int_{\lambda}^{3}(x-2)^2\ln(x-2)\mathrm{d}x=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)$$

On pose : $U(x)=\ln(x-2)$ et $V'(x)=(x-2)^2$

Alors : $U'(x)=\frac{1}{x-2}$ et $V(x)=\frac{(x-2)^3}{3}$

D'après la formule de l'intégration par partie :

$$\begin{aligned}\int_{\lambda}^{3}(x-2)^2\ln(x-2)\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\ln(x-2)\right]_{\lambda}^{3}-\frac{1}{3}\int_{\lambda}^{3}(x-2)^2\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\ln(x-2)\right]_{\lambda}^{3}-\frac{1}{9}\left[(x-2)^3\right]_{\lambda}^{3}\\ &= \left[\frac{1}{3}(x-2)^3\ln(x-2)-\frac{1}{9}(x-2)^3\right]_{\lambda}^{3}\\ &= \frac{1}{3}\times 1^3\ln 1-\frac{1}{9}\times 1^3-\left(\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\ln(\lambda-2)-\frac{1}{9}(\lambda-2)^3\right)\\ &= 0-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)\end{aligned}$$

Donc $\int_{\lambda}^{3}(x-2)^2\ln(x-2)\mathrm{d}x=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3}-\ln(\lambda-2)\right)$

0.5 **b)** Déduisons, en fonction de λ, l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations : $y=1$; $x=\lambda$ et $x=3$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda) &= \int_{\lambda}^{3} |f(x)-y|\mathbf{d}x \quad ua \\ &= \int_{\lambda}^{3} \left|1+(x-2)^2\ln(x-2)-1\right|\mathbf{d}x \quad ua \ (\text{car } [\lambda;3]\subset]2;+\infty[\,) \\ &= \int_{\lambda}^{3} \left|(x-2)^2\ln(x-2)\right|\mathbf{d}x \quad ua\end{aligned}$$

Et on a $x\in[\lambda;3]$ c.à.d. $\lambda\leqslant x\leqslant 3$ donc $\lambda-2\leqslant x-2\leqslant 1$ donc $\ln(x-2)<0$

D'où $\mathcal{A}(\lambda)=\int_{\lambda}^{3} -(x-2)^2\ln(x-2)\mathbf{d}x ua$

Donc $\boxed{\mathcal{A}(\lambda)=\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\ln(\lambda-2)-\frac{1}{3}\right)\right]cm^2}$

0.25 **c)** Calculons $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 2\\ \lambda>2}}\mathcal{A}(\lambda)$

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\lambda\to 2\\ \lambda>2}}\mathcal{A}(\lambda) &= \lim_{\substack{\lambda\to 2\\ \lambda>2}}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\ln(\lambda-2)-\frac{1}{3}\right)\right) \\ &= \lim_{\substack{\lambda\to 2\\ \lambda>2}}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}(\lambda-2)^3\ln(\lambda-2)-\frac{1}{9}(\lambda-2)^3\right)\end{aligned}$$

On pose $\gamma=\lambda-2$ (si $\lambda\to 2^+$ alors $\gamma\to 0^+$)

On obtient $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 2\\ \lambda>2}}\mathcal{A}(\lambda)=\lim\limits_{\substack{\gamma\to 0\\ \gamma>0}}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\gamma^3\ln\gamma-\frac{1}{9}\gamma^3\right)$

$\boxed{\lim\limits_{\substack{\lambda\to 2\\ \lambda>2}}\mathcal{A}(\lambda)=\frac{1}{9}}$ (car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^n\ln x=0$)

FIN