Exercice 1 — Session : NORMAL 2023 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(0,1,4)$, $B(2,1,2)$, $C(2,5,0)$ et $\Omega(3,4,4)$

0.25 pt **1 - a)** Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})$

0.5 pt **b)** En déduire l'aire du triangle ABC et la distance $d(B,(AC))$

2 - Soit D le milieu du segment $[AC]$

0.25 pt **a)** Vérifier que $\overrightarrow{D\Omega} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$

0.5 pt **b)** En déduire que $d(\Omega,(ABC)) = 3$

3 - Soit (S) la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 8z + 32 = 0$

0.5 pt **a)** Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S)

0.5 pt **b)** Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera

4 - Soient (Q_1) et (Q_2) les deux plans parallèles à (ABC) tels que chacun d'eux coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$

0.5 pt Déterminer une équation cartésienne pour chacun des deux plans (Q_1) et (Q_2)

Exercice 2 — Session : NORMAL 2023 — 3 Pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{2} + i$, $c = \bar{b}$ et $d = 2i$

0.25 pt **1 -** Écrire le nombre complexe a sous forme trigonométrique

0.25 pt **2 - a)** Vérifier que $b - d = c$

0.5 pt **b)** Montrer que $(\sqrt{2}+1)(b-a) = b-d$ et déduire que les points A, B et D sont alignés

0.25 pt **3 - a)** Vérifier que $ac = 2b$

0.5 pt **b)** En déduire que $2arg(b) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

4 - Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'

0.25 pt **a)** Montrer que $z' = \frac{1}{2}az$

0.5 pt **b)** En déduire que $R(C) = B$ et que $R(A) = D$

0.5 pt **c)** Montrer que $\frac{b-a}{c-a} = \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$, puis déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$

Exercice 3 — Session : NORMAL 2023 — 3 Pts

Une urne U_1 contient *six* boules portant les nombres 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 et une urne U_2 contient *cinq* boules portant les nombres 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2

On suppose que les boules des deux urnes sont indiscernables au toucher

On considère l'expérience aléatoire suivante :

" On tire une boule de l'urne U_1, et on note le nombre a qu'elle porte, puis on la met dans l'urne U_2, ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre b qu'elle porte "

On considère les événements suivants :

A : " La boule tirée de l'urne U_1 porte le nombre 1 "

B : " Le produit ab est égal à 2 "

0.5 pt **1 - a)** Calculer $p(A)$; la probabilité de l'événement A

0.5 pt **b)** Montrer que $p(B) = \dfrac{1}{4}$ (On peut utiliser l'arbre des possibilités)

0.75 pt **2 -** Calculer $p(A/B)$; probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé

3 - Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab

0.25 pt **a)** Montrer que $p(X = 0) = \dfrac{1}{3}$

0.5 pt **b)** Donner la loi de probabilité de X

(Remarquer que les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 et 4)

c) On considère les événements

M : " Le produit ab est pair non nul "

N : " le produit ab est égal à 1 "

0.5 pt Montrer que les événements M et N sont équiprobables

Exercice 4 Session : NORMAL 2023 — 11 Pts

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2 - \dfrac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité : 1 cm)

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f(x) = \dfrac{3x - 2 - 2x\ln x + x(\ln x)^2}{x}$

0.5 pt **b)** Montrer que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x(\ln x)^2 = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (On peut poser : $t = \sqrt{x}$)

0.5 pt **c)** Déduire que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty$, puis donner une interprétation géométrique du résultat

0.75 pt **d)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

0.5 pt **2 -** Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{2(1 - x + x\ln x)}{x^2}$

3 - En exploitant le tableau de variations ci-dessous, de la fonction dérivé f' de f sur $]0;+\infty[$

x	0	1	β	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$ 0	$\nearrow$ $f'(\beta)$	$\searrow$ 0

(On donne : $\beta \approx 4.9$)

0.5 pt **a)** Prouver que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f

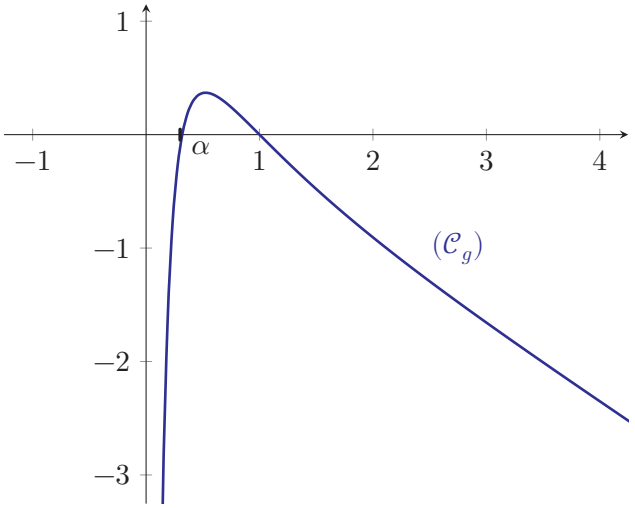
0.5 pt **b)** Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f" de la fonction f sur $]0;+\infty[$

c) Déduire la concavité de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en précisant les abscisses de ses deux points

1 pt d'inflexion

4 - La courbe $(\mathcal{C}_g)$ ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et qui s'annule en α et 1 ($\alpha \approx 0.3$)

Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$



0.5 pt **a)** A partir de la courbe $(\mathcal{C}_g)$, déterminer le signe de la fonction g sur $]0;+\infty[$

0.5 pt **b)** Déduire que la droite (Δ) est en dessous de $(\mathcal{C}_f)$ sur l'intervalle $[\alpha;1]$ et au-dessus de $(\mathcal{C}_f)$ sur les intervalles $]0;\alpha]$ et $[1;+\infty[$

1.5 pt **5 -** Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (Δ) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

(On prend : $\alpha \simeq 0.3$; $\beta \simeq 4.9$ et $f(\beta) \simeq 1.9$)

0.5 pt **6 - a)** Vérifier que la fonction $x \mapsto 2x - x\ln x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 1 - \ln x$ sur $[\alpha;1]$

1 pt **b)** En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_{\alpha}^{1} (1-\ln x)^2 \mathrm{d}x = 5(1-\alpha) + \alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$$

0.75 pt **c)** Déduire, en fonction de α, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$

7 - Soit la suite numérique $(\mathcal{U}_n)$ définie par $\mathcal{U}_0 \in]\alpha;1[$ et la relation $\mathcal{U}_{n+1} = f(\mathcal{U}_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

0.5 pt **a)** Montrer, par récurrence, que $\alpha < \mathcal{U}_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **b)** Montrer que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est croissante (on peut utiliser la question $4-b$))

0.75 pt **c)** En déduire que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est convergente et calculer sa limite

FIN