Exercice 1 — Session : RATTRAPAGE 2023 — 3 Pts

On considère la suite numérique $(u)n$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{2u_n + 5}$

0.5 pt **1 -** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > -1$

0.5 pt **2 -** Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis déduire que (u_n) est convergente

3 - On pose $v_n = \dfrac{3}{1+u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **a)** Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 puis déterminer son premier terme

0.5 pt **b)** Exprimer u_n en fonction de n , pour tout n de $\mathbb{N}$ et déduire la limite de (u_n)

4 - On pose $w_n = \mathrm{e}^{3\,-\,v_n}$ et $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **a)** Montrer que (w_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

0.5 pt **b)** Calculer la limite de la somme S_n

Exercice 2 — Session : RATTRAPAGE 2023 — 3 Pts

L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, soient les points $A\,(2;1;2)$, $B\,(-2;0;5)$, $C\,(4;-5;7)$ et $\Omega\,(1;-1;0)$

Soit (S) la sphère de centre Ω et de rayon $R = 3$

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega A}$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 13\vec{u}$ et déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés

0.25 pt **b)** Vérifier que $x + 2y + 2z - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0.5 pt **c)** Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

2 - Soient (P) le plan d'équation $3x+4y+z+1 = 0$ et (Δ) la droite passant par A et orthogonale au plan (P)

0.5 pt **a)** Montrer que (Δ) coupe (P) au point $H\left(\dfrac{1}{2}; -1; \dfrac{3}{2}\right)$

0.5 pt **b)** Déterminer les coordonnées de D tel que H soit milieu de $[AD]$

3 - Soit (Q) le plan passant D et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega D}$

0.25 pt **a)** Montrer que le plan (Q) est tangent à la sphère (S) en D

0.5 pt **b)** Montrer que les plans (Q) et (ABC) se coupent suivant la droite (BC)

Exercice 3 — Session : RATTRAPAGE 2023 — 3 Pts

1 - On considère le nombre complexe : $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

0.25 pt **a)** Montrer que $a = \sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

0.25 pt **b)** Déduire que a^{2022} est un nombre réel

2 - Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, soient les points $A(a)$ et $B(\bar{a})$

0.5 pt Déterminer une mesure de l'angle de la rotation R de centre O et qui transforme B en A

3 - On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_\alpha) : z^2 - \sqrt{3}z + \alpha = 0$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq 0$

Soient z et $\bar{z}$ les deux racines complexes conjuguées de l'équation E_α

Soient les points $M(z)$, $N(\bar{z})$ et $P(\sqrt{3})$ du plan complexe

0.5 pt **a)** Justifier que $\alpha > \dfrac{3}{4}$ et que $\alpha = z\bar{z}$

0.5 pt **b)** Montrer que : $|z| = |z - \sqrt{3}|$

0.5 pt **c)** Déduire que M et N appartiennent à (Δ) la médiatrice de $[OP]$

0.5 pt **d)** Déterminer la valeur de α pour laquelle $|z - \sqrt{3}| = \sqrt{3}$ et déduisons dans ca cas les points d'intersection de (Δ) et le cercle de centre P et de rayon $\sqrt{3}$

Exercice 4 — Session : RATTRAPAGE 2023 — 3 Pts

Une urne contient *quatre* boules blanches et *deux* boules noires, indiscernables au toucher

1 - On tire au hasard et simultanément *deux* boules de l'urne

0.5 pt **a)** Calculer la probabilité de l'événement A : " Tirer au moins une boule noire "

0.5 pt **b)** Soit l'événement B : " Obtenir *deux* boules de même couleur ". Montrer que $p(B) = \dfrac{7}{15}$

c) On répète cette expérience **cinq** fois en remettant dans l'urne les boules tirées, après chaque tirage

0.5 pt Quelle est la probabilité pour que l'événement B soit réalisé trois fois

2 - Dans cette question, on tire des boules de l'urne, une après l'autre et sans remise et on arrête le tirage lorsqu'on obtient une boule *blanche* pour la première fois

Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de tirages effectués dans cette expérience

0.25 pt **a)** Justifier que les valeurs prises par X sont : 1 ; 2 et 3

0.25 pt **b)** Montrer que $p(X = 2) = \dfrac{4}{15}$

0.5 pt **c)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

0.5 pt **d)** Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule noire ?

Exercice 5 — Session : RATTRAPAGE 2023 — 8 Pts

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 e^{x(2-x)} \ ; \ x \leq 2 \\ f(x) = 1 + (x-2)^2 \ln(x-2) \ ; \ x > 2 \end{cases}$

Soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité : 1 cm)

0.5 pt **1 -** Montrer que la fonction f est continue au point 2

0.25 pt **2 - a)** Vérifier que pour tout $x < 2$ et $x \neq 0$; $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = xe^{x(2-x)} - x.\dfrac{e^{x(2-x)} - 1}{x(2-x)}$

0.5 pt **b)** Montrer que f est dérivable à gauche en 2

0.75 pt **c)** Montrer que f est dérivable en 2 et que $f'(2) = 0$ puis interpréter géométriquement le résultat

0.25 pt **3 - a)** Vérifier que pour tout $x \leq 2$, $f(x) = x(x-2)e^{x(2-x)} + e^{x(2-x)}$

0.5 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat

0.75 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat

0.5 pt **4 - a)** Montrer que pour tout $x < 2$, $f'(x) = 2x(x-1)(2-x)\mathrm{e}^{x(2-x)}$

0.5 pt **b)** Montrer que pour tout $x > 2$, $f'(x) = (x-2)(1+2\ln(x-2))$

0.5 pt **c)** Résoudre dans l'intervalle $]2;+\infty[$, l'inéquation $1+2\ln(x-2) \leq 0$

0.75 pt **d)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

1 pt **5 -** Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$

(On donne : $f(3) = 1$; $2 + \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 2.6$ et $f\left(2 + \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) \approx 0.8$)

6 - Soit $\lambda \in]2;3[$

0.5 pt **a)** En utilisant une intégration par partie, montrer que :

$$\int_{\lambda}^{3} (x-2)^2 \ln(x-2)\mathrm{d}x = \frac{1}{9} + \frac{1}{3}(\lambda-2)^3\left(\frac{1}{3} - \ln(\lambda-2)\right)$$

0.5 pt **b)** Déduire en fonction de λ l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations : $y = 1$; $x = \lambda$ et $x = 3$

0.25 pt **c)** Calculer $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 2 \\ \lambda > 2}} \mathcal{A}(\lambda)$

FIN