ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2024

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{1 + u_n}$, pour tout entier naturel n

0.25 pt **1 - a)** Vérifions que $u_{n+1} = 4 - \dfrac{6}{1+u_n}$, pour tout entier naturel n

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} 4 - \frac{6}{1+u_n} &= \frac{4(u_n+1)}{1+u_n} - \frac{6}{1+u_n} \\ &= \frac{4 + u_n + 4 - 6}{1+u_n} \\ &= \frac{4u_n - 2}{1+u_n} \\ 4 - \frac{6}{1+u_n} &= u_{n+1} \end{aligned}$$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_{n+1} = 4 - \dfrac{6}{1+u_n}$

0.5 pt **b)** Montrons par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$, pour tout entier naturel n

Pour n=0 on a $u_0 = 4$ et $2 \leq 4 \leq 4$

donc $2 \leq u_0 \leq 4$

D'où la proposition est vraie pour $n = 0$

supposons que $2 \leq u_n \leq 4$, pour n fixé de $\mathbb{N}$

Et montrons que $2 \leq u_{n+1} \leq 4$

On a :

$$\begin{aligned}
2 \leqslant u_n \leqslant 4 &\Longrightarrow 3 \leqslant 1+u_n \leqslant 5 \\
&\Longrightarrow \frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{1+u_n} \leqslant \frac{1}{3} \\
&\Longrightarrow \frac{6}{5} \leqslant \frac{6}{1+u_n} \leqslant \frac{6}{3} \\
&\Longrightarrow \frac{6}{5} \leqslant \frac{6}{1+u_n} \leqslant 2 \\
&\Longrightarrow -2 \leqslant \frac{-6}{1+u_n} \leqslant -\frac{6}{5} \\
&\Longrightarrow 4-2 \leqslant 4-\frac{6}{1+u_n} \leqslant 4-\frac{6}{5} \\
&\Longrightarrow 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{14}{5} \\
&\Longrightarrow 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 4 \qquad (car \frac{14}{5} \leq 4)
\end{aligned}$$

D'où d'après le principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \leq u_n \leq 4$

0.25 pt **2 - a)** Montrons que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n}$, pour tout entier naturel n

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{4u_n - 2}{1+u_n} - u_n \\
&= \frac{4u_n - 2 - u_n(1+u_n)}{1+u_n} \\
&= \frac{4u_n - 2 - u_n - u_n^2}{1+u_n} \\
&= \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{1+u_n}
\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
\frac{(u_n - 1)(1 - u_n)}{1+u_n} &= \frac{2u_n - u_n^2 - 2 + u_n}{1+u_n} * \\
&= \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{1+u_n}
\end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(2 - 4_n)}{1 + u_n}$

0.5 pt

- — Montrons que la suite (u_n) est décroissante

  On a pour tout entier naturel n : $u_{n+2} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n}$ On sait que : $2 \leqslant u_n \leqslant$

  Donc : $1 \leqslant u_n - 1 \leqslant 3$ D'où $u_n - 1 > 0$

  Et $2 \leqslant 2 - u_n \leqslant 0$ D'où $2 - u_n \leqslant 0$

  Alors $(u_n - 1)(2 - u_n) \leq 0$

  Et puisque : $3 \leqslant 1 + u_n \leqslant 5$ d'où $u_n + 1 > 0$

Donc $\dfrac{(u_n-1)(2-u_n)}{1+u_n} \leq 0$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_{n+1}-u_n \leq 0$

D'où (u_n) est une suite décroissante décroissante.

- Déduisons que (u_n) est convergente.

On a (u_n) est décroissante et minorée par $2\,;\,(un \geq 2)$

Donc la suite (u_n) est convergente

3 - Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_n = \dfrac{2-u_n}{1-u_n}$, pour tout entier naturel n

0.5 pt **a)** Montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{2-u_{n+1}}{1-u_{n+1}} \\ &= \frac{2-\frac{4u_n-2}{1+u_n}}{1-\frac{4u_n-2}{1+u_n}} \\ &= \frac{\frac{2(4+u_n)-(4u_n-2)}{1+u_n}}{\frac{1+u_n-(4u_n-2)}{1+u_n}} \\ &= \frac{2+2u_n-u_n+2}{1+u_n-4u_n+2} \\ &= \frac{-2u_n+4}{-3u_n+3} \\ &= \frac{2(-u_n+2)}{3(-u_n+1)} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{2-u_n}{1-u_n}\right) \\ &= \frac{2}{3}v_n. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

0.5 pt **b)** Montrons que $u_n = 1 + \dfrac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$, pour tout entier naturel n

On a (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et de premier terme v_0

Donc $v_n = v_0 \cdot q^n = \dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$

car $v_0 = \dfrac{2-u_0}{1-u_0} = \dfrac{2-4}{1-4} = \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$.

Et on a :

$$v_n = \frac{2-u_n}{1-u_n} \Rightarrow v_n(1-u_n) = 2-u_n$$

$$\Rightarrow v_n - v_n \cdot u_n = 2-u_n$$

$$\Rightarrow u_n - v_n \cdot u_n = 2-v_n$$

$$\Rightarrow u_n(1-v_n) = 2-v_n$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2-v_n}{1-v_n}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1-v_n}{1-v_n} + \frac{1}{1-v_n}$$

$$\Rightarrow u_n = 1 + \frac{1}{1-v_n}$$

$$\Rightarrow u_n = 1 + \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_n = 1 + \dfrac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$

0.5 pt **c)** Calculons la limite de la suite (u_n).

$$\lim u_n = \lim 1 + \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} = 1+1 = 2$$

Car $-1 < \dfrac{2}{3} < 1 \Rightarrow \lim \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$

D'où $\lim u_n = 2$

Exercice 2 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(-1,0,-1)$ et $B(1,2,-1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2,-2,1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2,-1,0)$ et de rayon 5

0.25 pt **1 -** Montrons que $2x-2y+z+3=0$ est une équation cartésienne du plan (P)

Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace

On a (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2,-2,1)$

Soit $M(x;y;z) \in (P)$ on a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 2(x+1) + (-2) \times (y-0) + 1 \times (z+1) = 0$$

$$\iff 2x+2-2y+z+1 = 0$$

$$\iff 2x-2y+z+3 = 0$$

D'où l'équation du plan (P) est $2x - 2y + z + 3 = 0$

0.25 pt **2 -** Déterminons une équation cartésienne de la sphère (S)

On a (S) est la sphère de centre $\Omega(2; -1; 0)$ et de rayon $R = 5$

Soit $M(x, y, z) \in (S)$

On a :
$$\begin{aligned}\Omega M^2 = R^2 &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-(-1))^2 + (z-0)^2 = 5^2\\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 25\\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 = 25\\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 5 - 25 = 0\\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 20 = 0\end{aligned}$$

D'où l'équation cartésienne de la sphère (S) est $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 20 = 0$

0.5 pt **3 - a)** Vérifions que la distance du point Ω au plan (P) est $d(\Omega, (P)) = 3$

On a :
$$\begin{aligned}d(\Omega; (P)) &= \frac{|2x_\Omega - 2y_\Omega + z_\Omega + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}}\\ &= \frac{|2 \times 2 - 2 \times (-1) + 0 + 3|}{\sqrt{4+4+1}}\\ &= \frac{|4+2+3|}{\sqrt{9}}\\ &= \frac{9}{3}\\ &= d(\Omega; (P))3\end{aligned}$$

D'où $d(\Omega; (P)) = 3$

b) En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (T) de rayon à déterminer.

0.5 pt

On a : $d(\Omega; (P)) = 3 < R$

donc le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) de rayon r

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{R^2 - d^2}\\ &= \sqrt{5^2 - 3^2}\\ &= \sqrt{16}\\ r &= 4\end{aligned}$$

4 - a) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P) **0.5 pt**

On a (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (P)

donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

Soient $M(x,y,z) \in (\Delta)$ et $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\overrightarrow{\Omega M} = t\overrightarrow{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2t \\ y+1=-2t \quad /(t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+2t \\ y=-1-2t \quad /(t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$$

D'où une représentation paramétrique de la droite (Δ) est (Δ) : $\begin{cases} x &= 2+2t \\ y &= -1-2t \backslash (t\in\mathbb{R}) \\ z &= t \end{cases}$

b) Montrons que le point $H(0,1,-1)$ est le centre du cercle (Γ) **0.5 pt**

On a (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (P)

Et le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) de centre H

Donc H est le projeté orthogonale de Ω sur (P)

$$\text{donc } H \in (P)\cap(\Delta) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_H = 2+2t \\ y_H = -1-2t \backslash (t\in\mathbb{R}) \\ z_H = t \\ 2x_H - 2y_H + z_H + 3 = 0 \end{cases}$$

Donc : $2(2+2t)-2(-1-2t)+t+3=0$ D'où : $4+4t+2+4t+t+3=0$ Alors : $9t+9=0$

Donc : $t = -1$ Finalement : $\begin{cases} x_H = 2 + 2 \times (-1) = 0 \\ y_H = -1 - 2 \times (-1) = 1 \\ z_H = -1 \end{cases}$

D'où $H(0;1;-1)$ est le centre du cercle (Γ)

0.5 pt

c) Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$

On a : $\vec{n}(2;-2;1)$ et $\overrightarrow{AB}(2;2;0)$

donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 2 + (-2) \times 2 + 1 \times 0 = 4 - 4 = 0$

donc $(AB) \perp (\Delta)$

Déterminons les coordonnées du milieu de $[AB]$

$$\frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0$$
$$\frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
$$\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{(-1) + (-1)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

donc H est le milieu du segment $[AB]$

donc $H \in (\Delta)$

D'où (Δ) est la médiatrice de $[AB]$

Exercice 3 : (4 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B daffixes respectives $a = \sqrt{3}(1-i)$ et $b = 2 + \sqrt{3} + i$

0.5 pt

1 - Vérifier que $|a| = \sqrt{6}$ et que $\arg(a) = \frac{-\pi}{4}[2\pi]$ On a $a = \sqrt{3}(1-i)$

Donc :

$$\begin{aligned} |a| &= |\sqrt{3}(1-i)| \\ &= |\sqrt{3}| \cdot |1-i| \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \\ &= \sqrt{6} \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{3}(1-i) \\ &= \sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{6}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

Donc $|a| = \sqrt{6}$ et $\arg(a) \equiv \dfrac{-\pi}{4}[2\pi]$.

0.75 pt **2 - a)** Montrons que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$; On a :

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{2+\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}(1-i)} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-\sqrt{3}i} \\ &= \frac{(2+\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}+\sqrt{3}i)}{(\sqrt{3}-\sqrt{3}i)(\sqrt{3}+\sqrt{3}i)} \\ &= \frac{(2+\sqrt{3})\cdot\sqrt{3} + (2+\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}i + i\sqrt{3} + i^2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2+\sqrt{3}^2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}+3+2\sqrt{3}i+3i+i\sqrt{3}-\sqrt{3}}{3+3} \\ &= \frac{3+\sqrt{3}+3\sqrt{3}i+3i}{6} \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{3(\sqrt{3}+1)i}{6} \end{aligned}$$

Donc : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right)i$

Vérifions que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

On a :

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\times\frac{3}{3+\sqrt{3}}i\right) \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2}\times\frac{3}{\sqrt{3}(3+\sqrt{3})}i\right) \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{3+\sqrt{3}}{3}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

0.75 pt

b) En **Déduisons une forme trigonométrique du complexe** b

On a : $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

Donc :
$$\begin{aligned} b &= \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\right) a \\ &= \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) e^{i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(\frac{3\sqrt{6}+\sqrt{18}}{3}\right) e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} \\ &= \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) e^{i\frac{\pi}{12}} \\ &= \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\mathbf{sin}\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Donc : $b = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \mathbf{cos}\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + i\,\mathbf{sin}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

Vérifions que b^{24} est un nombre réel.

$$\begin{aligned} b^{24} &= \left(\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \cdot \mathbf{cos}\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \cdot \mathbf{sin}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^{24} \\ &= \left(\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\right)^{24} \cdot \left(\mathbf{cos}(24\frac{\pi}{12}) + i \cdot \mathbf{sin}\left(24\frac{\pi}{12}\right)\right) \quad \text{(Formule de Moiver)} \\ &= \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^{24} \cdot (\mathbf{cos}(2\pi) + i \cdot \mathbf{sin}(2\pi)) \end{aligned}$$

D'où $b^{24} = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^{24} \in \mathbb{R}$

3 - Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$, qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'.

On pose $R(B) = B', R(A) = A'$ et $R\left(A'\right) = A''$

a) Vérifions que $z' = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i)z$

$$\begin{aligned} R(M) = M' &\Leftrightarrow z' - 0 = e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot (z-0) \\ &\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot z \\ &\Leftrightarrow z' = \left(\mathbf{cos}\,\frac{\pi}{6} + i \cdot \mathbf{sin}\,\frac{\pi}{6}\right) \cdot z \\ &\Leftrightarrow z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) \cdot z \\ &\Leftrightarrow z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i) \cdot z \end{aligned}$$

0.5 pt

Vérifions que $\arg\left(a'\right) \equiv \dfrac{-\pi}{12}[2\pi]$ **où** a' **est l'affixe du point** A'

$R(A) = A' \Leftrightarrow a' = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i) \cdot a$

Donc :
$$\begin{aligned}\textbf{arg}\left(a^{'}\right) &\equiv \textbf{arg}\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\cdot a\right) \quad [2\pi]\\ &\equiv \textbf{arg}\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\right) + \textbf{arg}(a)[2\pi]\\ &\equiv \frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}[2\pi] \quad \text{car :} \quad \left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)=e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\\ &\equiv \frac{2\pi-3\pi}{12}[2\pi)\\ \textbf{arg}\left(a^{'}\right) &\equiv \frac{-\pi}{12}[2\pi].\end{aligned}$$

Donc : $\textbf{arg}\left(a^{'}\right) \equiv \frac{-\pi}{12}[2\pi]$

b) Montrons que l'affixe du point $A^{''}$ est $a^{''} = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$

$$\begin{aligned}R\left(A^{''}\right) = a^{''} &\Leftrightarrow a^{''} = e^{i\frac{\pi}{6}}\cdot a^{'}\\ &\Leftrightarrow a^{''} = \left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\right)^2\cdot a\end{aligned}$$

Donc :
$$\begin{aligned}|a^{''}| &= \left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right|^2\cdot|a|\\ &= 1\cdot\sqrt{6}\\ &= \sqrt{6}.\end{aligned}$$

Par suite :
$$\begin{aligned}\textbf{arg}(a^{''}) &\equiv \textbf{arg}\left(\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)\right)^2\cdot a\right)\\ &\equiv \textbf{arg}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2\right)+\textbf{arg}(a)[2\pi]\\ &\equiv 2\cdot\textbf{arg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+\textbf{arg}(a)[2\pi]\\ &= \frac{2\pi}{6}+\left(-\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]\\ &\equiv \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]\\ &\equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]\\ a^{''} &= \sqrt{6}\cdot\left(\textbf{cos}\,\frac{\pi}{12}+i\cdot\textbf{sin}\,\frac{\pi}{12}\right)\\ a^{''} &= \sqrt{6}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{12}}\end{aligned}$$

D'où l'affixe du point $A^{''}$ est $a^{''} = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$

0.5 pt **Déduisons que les points $O, A^{''}$ et B sont alignés.**

On a :

$$\frac{b-0}{a''-0} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})\cdot e^{i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{6}\cdot e^{i\frac{\pi}{12}}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}+6}{6} = \frac{\sqrt{3}+3}{3} \in \mathbb{R}$$

Comme $\frac{b-0}{a''-0} \in \mathbb{R}$

Alors les points O, A'' et B sont alignés

0.5 pt **c)** Montrer que b', l'affixe du point B', vérifie $b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$

$R(B) = B' \Leftrightarrow b' = e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot b$

$\Leftrightarrow b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \times a \times e^{i\frac{\pi}{6}}$

$\Leftrightarrow b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \times \sqrt{6} \times e^{i\frac{\pi}{12}} \times e^{i\frac{\pi}{6}}$ car : $b = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \times \sqrt{6} \times e^{i\frac{\pi}{12}}$ (Voir question 2-b)

$\Leftrightarrow b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \times \sqrt{6} \times e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12})}$

$\Leftrightarrow b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \times \sqrt{6} \times e^{i\frac{3\pi}{12}}$

$\Leftrightarrow b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \times \sqrt{6} \times e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \times \bar{a}$ car : $\bar{a} = \sqrt{6}e^{-(-i\frac{\pi}{4})} = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$

0.5 pt **d) Déduisons que le triangle OAB' est rectangle en O**

Comme : $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'}}\right) \equiv \left(\frac{b'-0}{a-0}\right)[2\pi]$

$\equiv \mathbf{arg}\left(\frac{b'}{a}\right)[2\pi]$

$\equiv \mathbf{arg}\left(\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}\cdot\bar{a}}{a}\right)[2\pi]$

$\equiv \mathbf{arg}\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\cdot i\right)$ $[2\pi]$ (Car :$\bar{a} = i \cdot a$)

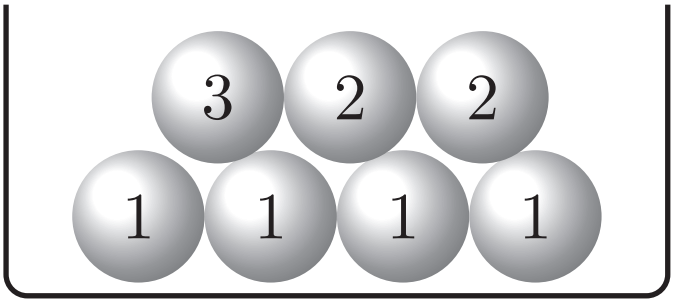
$\equiv \mathbf{arg}(i)[2\pi]$ $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3} \in \mathbb{R}^+\right)$

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}$ $(2\pi]$

Donc le triangle OAB' est rectangle en O

Exercice 4 : (2pts)

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.



L'urne U

On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

0.5 pt **1 -** Montrons que $P(A) = \frac{1}{3}$

Soit Ω l'univers des éventualités

On tire simultanément au hasard deux boules de l'urne

Donc : $card(\Omega) = C_7^2 = 21$

Puisque les boules sont indiscernables au toucher alors on a une situation équiprobabilité

D'où : $P(A) = \frac{card(A)}{card(\omega)}$

A : tirée deux boules portent le nombre 2 , où bien 1

$card(A) = C_4^2 + C_2^2 = 6 + 1 = 7$

Donc : $P(A) = \frac{card(A)}{card(\omega)} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$

0.5 pt **2 -** Montons que $P(B) = \frac{5}{21}$

B : Tirées deux poules portent les nombres 1 et 3 où bien 2 et 2

Donc $card(B) = C_4^1 + C_2^2 = 4 + 1 = 5$

Donc : $P(B) = \frac{card(B)}{card(\omega)} = \frac{5}{21}$

0.5 pt **3 -** Calculons $P(A \cap B)$

$A \cap B$: tirée deux boules de même couleur dont la somme égale à 4 (les deux boules tirées

portent le nombre 2)

$card(A \cap B) = C_2^2 = 1$

Donc : $P(A \cap B) = \dfrac{card(A \cap B)}{card(\omega)} = \dfrac{1}{21}$

0.5 pt **4 -** l'indépendance des événements A et B.

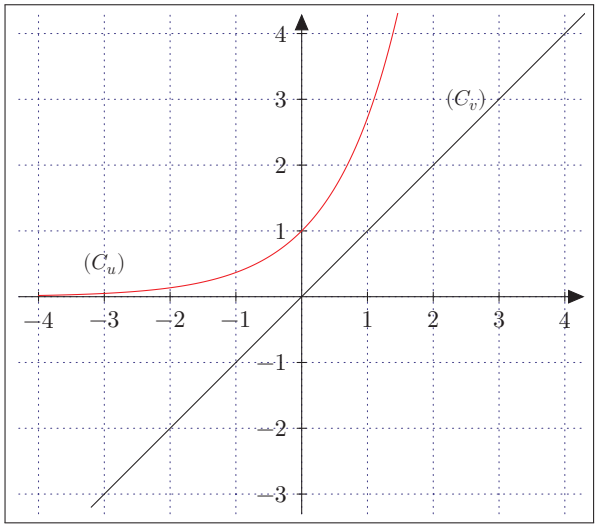
On a $P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{21} = \dfrac{5}{63} \neq P(A \cap B)$

Donc A et B ne sont pas indépendants

Problème : (8 pts)

Partie I : On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$

0.5 pt **1 -** Traçons dans un même repère orthonormé les courbes $(\mathcal{C}_u)$ et $(\mathcal{C}_v)$ des fonctions u et v



0.25 pt **2 -** Justifions graphiquement que $e^x - x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$; (C_u) est en dessus de (C_v)

Alors pour tout x de $\mathbb{R}$; $e^x - x > 0$

3 - Calculons l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_u)$, la courbe $(\mathcal{C}_v)$ et les droites

0.5 pt d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_u)$, la courbe $(\mathcal{C}_v)$ et les droites

d'équations $x=0$ et $x=1$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 |u(x)-x|\mathbf{d}dx.u.s \\ &= \int_0^1 |e^x-x|\mathbf{d}dx.u.s \\ &= \int_0^1 e^x-x\mathbf{d}dx.u.s \quad \text{car}\,;\ e^x-x>0 \\ &= \left[e^x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1.u.s \\ &= \left(e-1\frac{1}{2}-(e^0-0)\right).u.s \\ \mathcal{A} &= \left(e-\frac{3}{2}\right).us\end{aligned}$$

Partie II : On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=x+1-\ln(e^x-x)$.

0.25 pt **1 - a)** Vérifions que f est définie sur $\mathbb{R}$

Soit D_f la domaine de la définition de la fonction f

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/f(x)\in\mathbb{R}\}$

$=\{x\in\mathbb{R}/e^x-x>0\}$

D'après question 2 ***Partie I*** on a $\forall x\in\mathbb{R}\,;\ e^x-x>0$.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

0.5 pt **b)** Montrons que pour tout $x\in\mathbb{R}, f(x)=1-\ln(1-xe^{-x})$

Soit $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}f(x) &= x+1-\ln\left(e^x\left(1-\frac{x}{e^x}\right)\right) \\ &= x+1-\left(\ln(e^x)+\ln\left(1-\frac{x}{e^x}\right)\right) \\ &= x+1-x-\ln(1-xe^{-x}) \\ &= 1-\ln(1-xe^{-x})\end{aligned}$$

Car : $\dfrac{1}{e^x}=e^{-x}$ et $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)\quad ;\quad (a,b)\in\mathbb{R}_+^*$

Donc : $f(x)1-\ln(1-xe^{-x})$

0.5 pt **c)** Déduisons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, puis interprétons géométriquement ce résultat.

On pose $t=-x$ si $x\to+\infty$ on a $t\to-\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{-x}=\lim\limits_{t\to-\infty} te^t=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-xe^{-x}=1$

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1-xe^{-x})=0$

Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\ln(1-xe^{-x})=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

Alors la courbe de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y=1$ au voisinage de $+\infty$

0.25 pt **2 - a)** Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

On pose $t=-x$ si $x\to-\infty$ on a $t\to+\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -xe^{-x} = \lim\limits_{t\to+\infty} te^{t} = +\infty$ car : $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{t} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - xe^{-x} = +\infty$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} -\ln(1-xe^{-x}) = -\infty$

Par suite $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \ln(1-xe^{-x}) = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

0.5 pt **b)** Vérifions que pour tout $x<0, f(x) = x+1-\ln(-x)-\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)$

Soit $x<0$

$$f(x) = x+1-\ln(e^{x}-x)$$
$$= x+1-\ln\left(-x\left(\frac{e^{x}}{-x}+1\right)\right)$$
$$f(x) = x+1-\ln(-x)-\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)$$

Donc : $\forall x<0\,;\ f(x) = x+1-\ln(-x)-\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)$

0.75 pt **c)** Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ puis déduisons que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1-\ln(-x)-\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{\ln(-x)}{-x}-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{-x} = \lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(t)}{t}=0$

Et $\lim\limits_{x\to-\infty} -xe^{-x} = \lim\limits_{t\to+\infty} te^{t} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^{-x}}=0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)=0$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{\ln(-x)}{-x}-\frac{\ln\left(1-\frac{1}{xe^{-x}}\right)}{x}=1$

D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

Or : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to-\infty} 1-\ln(1-xe^{-x}) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} -\ln(1-xe^{-x}) = -\infty$

Donc : (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$ au voisinage de $-\infty$

0.5 pt **a)** Montrons que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{1-x}{e^{x}-x}$

Soit $x\in\mathbb{R}$

On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$(\forall x \in \mathbb{R})$; $f'(x) = \left(x + 1 - \ln(e^x - x)\right)$

$$= 1 - \frac{(\mathbf{e}^x - x)'}{\mathbf{e}^x - x}$$
$$= 1 - \frac{\mathbf{e}^x - 1}{\mathbf{e}^x - x}$$
$$= \frac{\mathbf{e}^x - x - \mathbf{e}^x + 1}{\mathbf{e}^x - x}$$
$$f'(x) = \frac{1 - x}{\mathbf{e}^x - x}$$

Alors $\boxed{f'(x) = \frac{1 - x}{\mathbf{e}^x - x}}$

0.5 pt **b)** Étudions le signe de la fonction dérivé de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$

Le signe de f' est celui de $1 - x$ car $\mathbf{e}^x - x > 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1 - x$		$+$	0	$-$	

Déduisons le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$2 - \ln(\mathbf{e} - 1)$	↘	1

$f(1)1 + 1 - \ln(\mathbf{e}^1 - 1) = 2 - \ln(\mathbf{e} - 1)$

0.75 pt **c)** Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-1; 0[$

f est continue sur $\mathbb{R}$ (car f est dérivable sur $\mathbb{R}$), et donc continue sur $[-1; 0]$

f est strictement croissante sur $[-1; 0]$ (voir tableau de variation de f)

✍ $f(-1) = -1 + 1 - \ln(\mathbf{e}^{-1} + 1) = -\ln(\frac{1}{\mathbf{e}} + 1)$

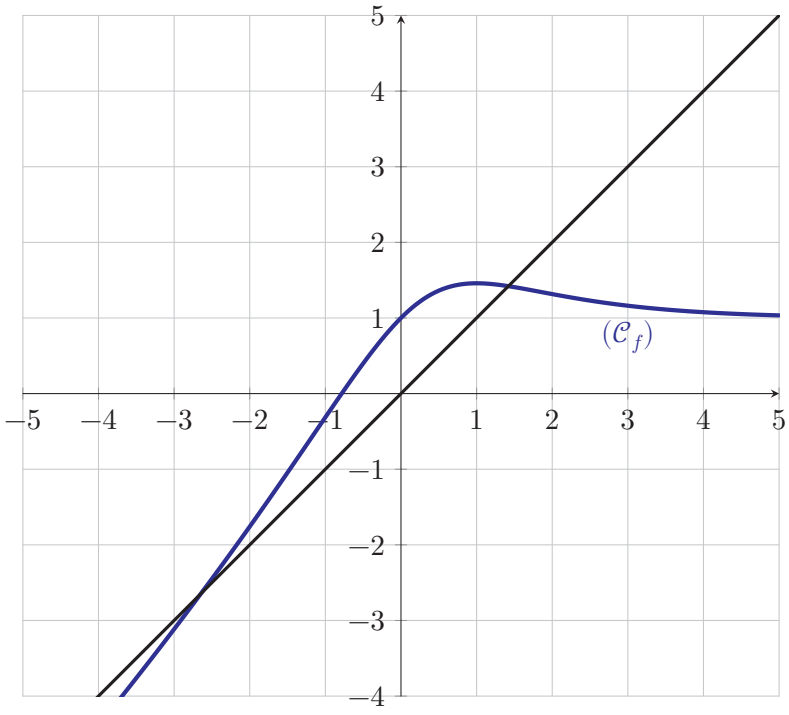
Or $\frac{1}{\mathbf{e}} + 1 > 1 \Rightarrow \ln(\frac{1}{\mathbf{e}} + 1) > 0 \Rightarrow -\ln(\frac{1}{\mathbf{e}} + 1) < 0$

✍ $f(0) = 0 + 1 - \ln(\mathbf{e}^0 - 0) = 1 - 1 > 0$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.)

, $\boxed{\text{L'équation } f(x) = 0 \text{ admet une solution unique dans l'intervalle }]-1; 0[}$

3 - La courbe (C_f) suivante est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé



0.5 pt **a)** Justifions graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β

On remarque d'après la figure que la courbe (C_f) de la fonction f coupe la droite d'équation $y = x$ en deux points d'abscisses α et β

Donc l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β

0.5 pt **b)** Montrons que $\mathbf{e}^{\alpha} - \mathbf{e}^{\beta} = \alpha - \beta$

(Il y as d'autre méthodes pour aboutir au résultat)

On a α et β sont solutions de l'équation $f(x) = x$, donc $f(\alpha) = \alpha$ et $f(\beta) = \beta$

$$f(\alpha) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) - \alpha = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \mathbf{ln}(\mathbf{e}^{\alpha} - \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{ln}(\mathbf{e}^{\alpha} - \alpha) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbf{e}^{\alpha} - \alpha = \mathbf{e} \qquad ①$$

$$f(\beta) = \beta \Rightarrow f(\beta) - \beta = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \mathbf{ln}(\mathbf{e}^{\beta} - \beta) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{ln}(\mathbf{e}^{\beta} - \beta) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbf{e}^{\beta} - \beta = \mathbf{e} \qquad ②$$

De ① et ② on a $\mathbf{e}^{\alpha} - \alpha = \mathbf{e}^{\beta} - \beta$

D'où $\mathbf{e}^{\alpha} - \mathbf{e}^{\beta} = \alpha - \beta$

0.5 pt **4 - a)** Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera

On a g est continue sur $]-\infty;1]$ (car dérivable sur $]-\infty;1]$)

Et g est strictement croissante sur $]-\infty;1]$ (tableau de variation)

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J tel que :

$$\begin{aligned} J &= g(I) \\ &= g(]-\infty;1]) \\ &= \left]\lim_{-\infty\to g(x)};g(1)\right] \\ &=]-\infty;2-\mathbf{ln}(\mathbf{e}-1)] \end{aligned}$$

Finalement $\boxed{J=]-\infty;2-\mathbf{ln}(\mathbf{e}-1)]}$

0.75 pt

b) Vérifions que g^{-1} est dérivable en 1 et calculons $\left(g^{-1}\right)'(1)$

On a $f(0)=1$, donc $g(0)=1$

Or g est dérivable en 0 et $g'(0)=\dfrac{1-0}{\mathbf{e}^0-0}=1\neq 0$

Donc $\boxed{g^{-1} \text{ est dérivable en } 1}$

Et on a :

$$\begin{aligned} \left(g^{-1}\right)'(1) &= \frac{1}{g'\left(g^{-1}(1)\right)} \\ &= \frac{1}{g'(0)} \\ &= \frac{1}{1} \end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\left(g^{-1}\right)'(1)=1}$