ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2024

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 (3pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les deux points $A(1;1;0)$ et $\Omega(-1;1;-2)$ et le plan (P) d'équation $x+z-1=0$

0.5 pt **1 - a)** Vérifions que A est un point du plan (P) et donner un vecteur normal de (P)

✍ On a $x_A+z_A-1=1+0-1=0$, donc $A(1;1;0)\in(P)$

✍ On a $(P): x+z-1=0$, ç.à.d. $(P): 1x+0y+1z-1=0$

Donc $\overrightarrow{n}(1;0;1)$ est un vecteur normal du plan (P)

0.5 pt **b)** Montrons que la droite (ΩA) est perpendiculaire au plan (P)

On a $\overrightarrow{n}(1;0;1)$ est un vecteur normal du plan (P)

Et on a $\overrightarrow{\Omega A}(2;0;2)$

Donc $\overrightarrow{\Omega A}=2\overrightarrow{n}$

Alors $(\Omega A)\perp(P)$

2 - Soit (S) l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace vérifiant : $x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z-3=0$

0.5 pt **a)** Montrons que (S) est une sphère de centre Ω et déterminer son rayon

On a $x^2+y^2+z^2+2x-2y+4z-3=0$

ç.à.d. $x^2+2x+1+y^2-2y+1+z^2+4z+4-1-1-4-3=0$

ç.à.d. $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9=3^2$

Donc (S) est une sphère de centre $\Omega(-1;1;-2)$ et de rayon 3

0.5 pt **b)** Montrons que (P) coupe (S) suivant un cercle de centre A puis déterminer son rayon

✍ On a $d(\Omega;(P)) = \dfrac{|-1+(-2)-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Or $2\sqrt{2} < 3$, donc (P) coupe (S) selon un cercle

✍ On a $A \in (P)$ et $\Omega A = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2} = d(\Omega;(P))$

Donc (P) coupe (S) selon un cercle de centre A

Et de rayon $r = \sqrt{9-8} = 1$

3 - Soit (Q_m) un plan d'équation $x+y+mz-2=0$, où m est un nombre réel

0.25 pt **a)** Vérifions que A est un point du plan (Q_m), pour tout m de $\mathbb{R}$

On a $x_A + y_A + mz_A - 2 = 1+1-m\times 0-2 = 0$

Donc $A \in (Q_m)\ \forall m \in \mathbb{R}$

0.5 pt **b)** Déterminons la valeur du réel m pour que (Q_m) soit perpendiculaire au plan (P)

$$(Q_m)\perp(P) \Leftrightarrow \overrightarrow{n}_{(Q_m)}.\overrightarrow{n}_{(P)} = 0$$
$$\Leftrightarrow 1\times 1 + 0\times 1 + 1\times m = 0$$
$$\Leftrightarrow m = -1$$

Finalement $m = -1$

0.25 pt **c)** Existe-t-il un plan (Q_m) qui coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre A ? Justifions

(Q_m) coupe la sphère (S)suivant un cercle de centre $A \Rightarrow d(\Omega;(Q_m)) = \Omega A$

$$\Rightarrow \frac{|-1+1-2m-2|}{\sqrt{1^2+1^2+m^2}} = 2\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow |m+1| = \sqrt{2m^2+4}$$
$$\Rightarrow (m+1)^2 = 2m^2+4$$
$$\Rightarrow m^2 - 2m + 3 = 0$$

Or $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times 3 = -8 < 0$, donc l'équation n'a pas de solution

Donc (Q_m) ne va jamais couper (S) selon un cercle de centre A

Exercice 2 (4pts)

I) On considère dans l'espace des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 4z + 9 = 0$

0.25 pt **1 -** Vérifions que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = \left(2i\sqrt{5}\right)^2$

On a $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 16 - 36 = -20 = -(2\sqrt{5})^2 = (2i\sqrt{5})^2$

Finalement $\boxed{\Delta = \left(2i\sqrt{5}\right)^2}$

0.5 pt **2 -** Résolvons l'équation (E)

On sait que $\Delta = \left(2i\sqrt{5}\right)^2 Is0$ donc l'équation (E) a deux solutions complexes conjuguées

$z_1 = \dfrac{4 + 2i\sqrt{5}}{2} = 2 + i\sqrt{5}$ et $z_1 = \dfrac{4 - 2i\sqrt{5}}{2} = 2 - i\sqrt{5}$

Alors $\boxed{S = \{2 + i\sqrt{5}; 2 - i\sqrt{5}\}}$

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les point A, B et C d'affixes respectives $a = 2 + i\sqrt{5}$, $b = 2 - i\sqrt{5}$ et $c = 2 - \sqrt{5}$

0.25 pt **1 - a)** Vérifions que $|a| = 3$

On a $|a| = \sqrt{2^2 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9}$

Donc $\boxed{|a| = 3}$

0.25 pt **b)** Montrons que le triangle OAB est isocèle

On a $|b| = \sqrt{2^2 + \sqrt{5}^2} = \sqrt{4 + 5} = \sqrt{9} = 3$

Comme $OA = |a| = 3$ et $OB = |b| = 3$, donc $\boxed{OAB \text{ est isocèle en } O}$

0.5 pt **2 - a)** Vérifions que $\dfrac{a - c}{b - c} = i$

On a $\dfrac{a - c}{a - b} = \dfrac{2 + i\sqrt{5} - 2 + \sqrt{5}}{2 - i\sqrt{5} - 2 + \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5} + i\sqrt{5}}{\sqrt{5} - i\sqrt{5}} = \dfrac{1 + i}{1 - i} = \dfrac{(1 + i)^2}{2}$

Alors $\boxed{\dfrac{a - c}{b - c} = i}$

0.5 pt **b)** Déduisons la nature du triangle ABC

✍ On a d'une part $\dfrac{a - c}{b - c} = i$, donc $\dfrac{AC}{BC} = \left|\dfrac{a - c}{b - c}\right| = |i| = 1$

Donc $AC = BC$

✍ Et on a d'autre part $(\widehat{\vec{CB}; \vec{CA}}) \equiv arg\left(\dfrac{a - c}{b - c}\right)[2\pi] \equiv arg(i)[2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc $\boxed{ABC \text{ est rectangle et isocèle en } C}$

0.5 pt **3 - a)** Déterminons l'affixe du point D image de B par la translation de vecteur $\vec{CA}$

On a

$$T_{\overrightarrow{CA}}(B) = D \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$$

$$\Rightarrow d - b = a - c$$

$$\Rightarrow d = a - c + b$$

$$\Rightarrow d = 2 + i\sqrt{5} - 2 + \sqrt{5} + 2 - i\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow d = 2 + \sqrt{5}$$

Finalement $\boxed{d = 2 + \sqrt{5} \text{ est l'affixe du point } D}$

0.5 pt **b)** Montrons que $ADBC$ est un carré

On a $T_{\overrightarrow{CA}}(B) = D \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$ donc $ADBC$ est un parallélogramme

Or ABC est rectangle isocèle en C, ç.à.d. $CA = CB$

Donc $\boxed{ADBC \text{ est un carré}}$

4 - On pose $x_n = \left(\frac{a}{3}\right)^n$ et $y_n = \frac{1}{1 - x_n}$, avec n un entier naturel non nul

0.25 pt **a)** Vérifions que $x_n\overline{x_n} = 1$

On a $x_n\overline{x_n} = \left(\frac{a}{3}\right)^n . \overline{\left(\frac{a}{3}\right)^n} = \left(\frac{a}{3}\right)^n . \left(\frac{\bar{a}}{3}\right)^n = \left(\frac{a\bar{a}}{9}\right)^n$

$$= \left(\frac{(2 + i\sqrt{5})(2 - i\sqrt{5})}{9}\right)^n = \left(\frac{9}{9}\right)^n$$

Finalement $\boxed{x_n\overline{x_n} = 1}$

0.5 pt **b)** Montrons que $y_n + \overline{y_n} = 1$ puis déduire la partie réelle de y_n

On a $y_n + \overline{y_n} = \frac{1}{1 - x_n} + \overline{\left(\frac{1}{1 - x_n}\right)} = \frac{1}{1 - x_n} + \frac{1}{1 - \overline{x_n}} = \frac{1 - \overline{x_n} + 1 - x_n}{(1 - x_n)(1 - \overline{x_n})} = \frac{2 - \overline{x_n} - x_n}{1 - \overline{x_n} - x_n + x_n.\overline{x_n}}$

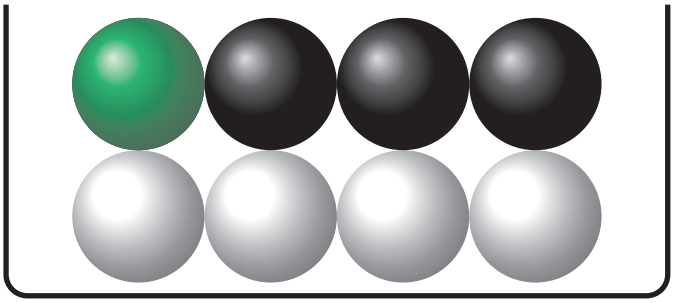
$$= \frac{2 - \overline{x_n} - x_n}{2 - \overline{x_n} - x_n} \text{ car } x_n\overline{x_n} = 1$$

Finalement $\boxed{y_n + \overline{y_n} = 1}$

Exercice 3 (2pts)

Une urne contient huit boules : quarte boules blanches, trois boules noires et une boule verte.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.



On tire au hasard successivement est sans remise trois boules de l'urne

0.25 pt **1 -** Vérifions que le nombre de tirages possibles est égal à 336

Il s'agit d'un tirage successif sans remise de trois boules parmi huit boules, le nombre de tirage possible est :

$A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$

0.5 pt **2 -** Calculons la probabilité de l'évènement A : « Tirer trois boules blanches »

$p(A) = \dfrac{A_4^3}{336} = \dfrac{4 \times 3 \times 2}{336} = \dfrac{24}{336}$

Finalement $p(A) = \dfrac{1}{14}$

0.75 pt **3 -** Montrons que la probabilité de l'évènement B : « Tirer trois boules de même couleur » est

$p(B) = \dfrac{5}{56}$

$p(B) = \dfrac{A_4^3 + A_3^3}{336} = \dfrac{4 \times 3 \times 2 + 3 \times 2 \times 1}{336} = \dfrac{30}{336}$

Finalement $p(B) = \dfrac{5}{56}$

0.5 pt **4 -** Calculons la probabilité de l'évènement C : « Obtenir au moins deux couleurs différentes »

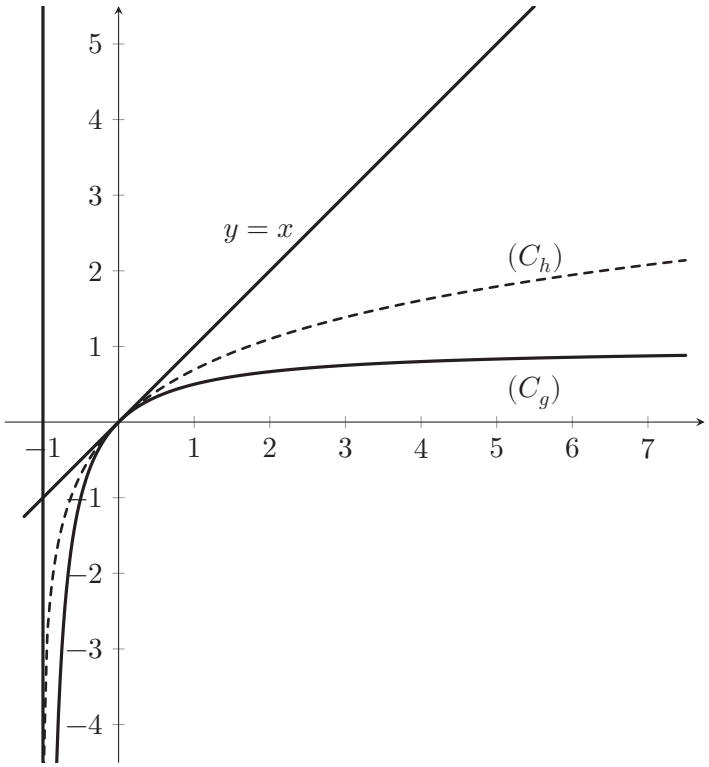
$p(C) = 1 - p(B) 1 - \dfrac{5}{56}$, car $C = \bar{B}$

Finalement $p(C) = \dfrac{51}{56}$

Problème (11pts)

Partie I

La figure ci-après représente les courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ des fonctions $g : x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ et $h : x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ et la droite d'équation $y = x$, dans un même repère orthonormé



0.5 pt **1 - a)** A partir de cette figure, justifions que : $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$, pour tout x de $]-1;+\infty[$

Soit $x \in]-1;-\infty[$

Graphiquement, la droite d'équation $y = x$ est au dessus de $(\mathcal{C}_h)$ et $(\mathcal{C}_h)$ est au dessus de $(\mathcal{C}_g)$

Donc $\boxed{\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x}$

0.25 pt **b)** Déduisons que $(1+x)\ln(1+x) - x \geq 0$, pour tout x de $]-1;+\infty[$

On a $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$; $\forall x \in]-1;-\infty[$

Donc $x \leq (1+x)\ln(1+x)$ comme $1+x > 0$

Alors $\boxed{(1+x)\ln(1+x) - x \geq 0}$

0.5 pt **c)** Prouvons que $\mathbf{e}^x - (1+\mathbf{e}^x)\ln(1+\mathbf{e}^x) \leq 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$

On a $(1+x)\ln(1+x) - x \geq 0$; $\forall x \in]-1;-\infty[$

Or $\mathbf{e}^x > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$, donc $\mathbf{e}^x \in]-1;-\infty[$

Alors $\mathbf{e}^x - (1+\mathbf{e}^x)\,\mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^x) \leq 0$; $\forall x \imath \mathbb{R}$

2 - Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = g(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

0.5 pt **a)** Montrons par récurrence que $0 < u_n \leq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

✍ Pour $n = 0$, on a $0 \leq u_0 = 1 \leq 1$ est vraie

✍ Supposons que $0 < u_n \leq 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $0 < u_{n+1} \leq 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$

On a

$0 < u_n \leq 1 \Rightarrow g(0) < g(u_n) \leq g(1)$ puisque g est strictement croissante $\Rightarrow 0 < u_{n+1} \leq 1$ puisque $g($

Ainsi $0 < u_n \leq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **b)** Montrons que la suite (u_n) est décroissante (On peut utiliser la question 1- a))

On a $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n$

Or $(\mathcal{C}_g)$ est en dessous de la droite d'équation $y = x$, donc $g(x) \leq x$; $\forall x \in]-1;-\infty[$

Et comme $u_n \in]0;1]$ donc $g(u_n) \leq u_n$

Par conséquent la suite (u_n) est décroissante

0.25 pt **c)** Déduisons que la suite (u_n) est convergente

On a (u_n) est une suite décroissante et minorée par 0

Donc (u_n) est convergente

0.75 pt **d)** Déterminons la limite de (u_n)

✍ On a $u_{n+1} = g(u_n)$

✍ Et $u_0 \in]0;1]$

✍ Et g est une fonction continue sur $]0;1]$ et $g(]0;1]) \subset]0;1]$ (graphiquement)

Alors, la limite l de (u_n), vérifie $g(l) = l$

Graphiquement on trouve : $g(l) = l \equiv l = 0$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathbf{e}^{-x}\ln\left(1+\mathbf{e}^{x}\right)$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

0.5 pt **1 - a)** Calculons $f(0)$ et vérifions que $f(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

✍ $f(0) = \mathbf{e}^{0}\ln(1+\mathbf{e}^{0}) = 1 \times \ln(1+1) = \ln 2$

Finalement : $\boxed{f(0) = \ln 2}$

✍ Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \mathbf{e}^{x} > 0$ et $\mathbf{e}^{-x} > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \mathbf{e}^{x}+1 > 1$ et $\mathbf{e}^{-x} > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \ln(\mathbf{e}^{x}+1) > 0$ et $\mathbf{e}^{-x} > 0$

D'où $\mathbf{e}^{-x}\ln(\mathbf{e}^{x}+1) > 0$

Finalement $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) > 0}$

0.5 pt **b)** Montrons que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, puis donnons une interprétation géométrique de ce résultat

✍ $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\mathbf{e}^{-x}\ln(1+\mathbf{e}^{x})$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+\mathbf{e}^{x})}{\mathbf{e}^{x}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(+t)}{t} (\text{ On posant } t = \mathbf{e}^{x})$$

Finalement $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1}$

✍ $(\mathcal{C}_f)$ admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$

0.5 pt **c)** Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, puis donnons une interprétation géométrique de ce résultat

✍ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\mathbf{e}^{-x}\ln(1+\mathbf{e}^{x})$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\mathbf{e}^{x})}{\mathbf{e}^{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\mathbf{e}^{x})}{1+\mathbf{e}^{x}} \frac{1+\mathbf{e}^{x}}{\mathbf{e}^{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} \frac{t}{t-1} (\text{ On posant } t = 1+\mathbf{e}^{x})$$

$$= 0 \times 1$$

Finalement $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

✍ $(\mathcal{C}_f)$ admet la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

0.5 pt **2 - a)** Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{1}{1+\mathbf{e}^{x}} - \mathbf{e}^{-x}\ln\left(1+\mathbf{e}^{x}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit, somme et composé de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = \left(\mathbf{e}^{-x}\ln(1+\mathbf{e}^{x})\right)'$$

$$= \left(\mathbf{e}^{-x}\right)'\ln(1+\mathbf{e}^{x}) + \mathbf{e}^{-x}(\ln(1+\mathbf{e}^{x}))'$$

$$= -\mathbf{e}^{-x}\ln(1+\mathbf{e}^{x}) + \frac{\mathbf{e}^{-x}\mathbf{e}^{x}}{1+\mathbf{e}^{x}}$$

Finalement $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{1+\mathbf{e}^{x}} - \mathbf{e}^{-x}\ln(1+\mathbf{e}^{x}) \ \forall x \in \mathbb{R}}$

0.5 pt **b)** Vérifions que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{\mathbf{e}^{x} - \left(1+\mathbf{e}^{x}\right)\ln\left(1+\mathbf{e}^{x}\right)}{\mathbf{e}^{x}\left(1+\mathbf{e}^{x}\right)}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\mathbf{e}^x} - \mathbf{e}^{-x}\ln(1+\mathbf{e}^x)$$

$$= \frac{1}{1+\mathbf{e}^x} - \frac{\ln(1+\mathbf{e}^x)}{\mathbf{e}^x}$$

Finalement $\boxed{f'(x) = \dfrac{\mathbf{e}^x - \left(1+\mathbf{e}^x\right)\ln\left(1+\mathbf{e}^x\right)}{\mathbf{e}^x\left(1+\mathbf{e}^x\right)} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

0.5 pt **c)** Déduisons que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (On peut utiliser la question 1- c) de la Partie I)

On a d'après $I)1-c) \quad \forall x \in \mathbb{R}; \mathbf{e}^x - (1+\mathbf{e}^x)\ln(1+\mathbf{e}^x) \leq 0$

Et on a $\forall x \in \mathbb{R}$; $\mathbf{e}^x > 0$ et $1+\mathbf{e}^x > 0$

Donc $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

D'où $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$

0.5 pt **3 - a)** Déterminons l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0

L'équation de l droite (T) s'écrit $y = f(0)(x-0) + f'(0)$ ç.à.d. $y = f(0) \times x + f'(0)$

On a $f(0) = \ln 2$ et $f'(0) = \dfrac{\mathbf{e}^0 - \left(1+\mathbf{e}^0\right)\ln\left(1+\mathbf{e}^0\right)}{\mathbf{e}^0\left(1+\mathbf{e}^0\right)} = \dfrac{1-2\ln 2}{1\times 2} = \dfrac{1}{2} - \ln 2$

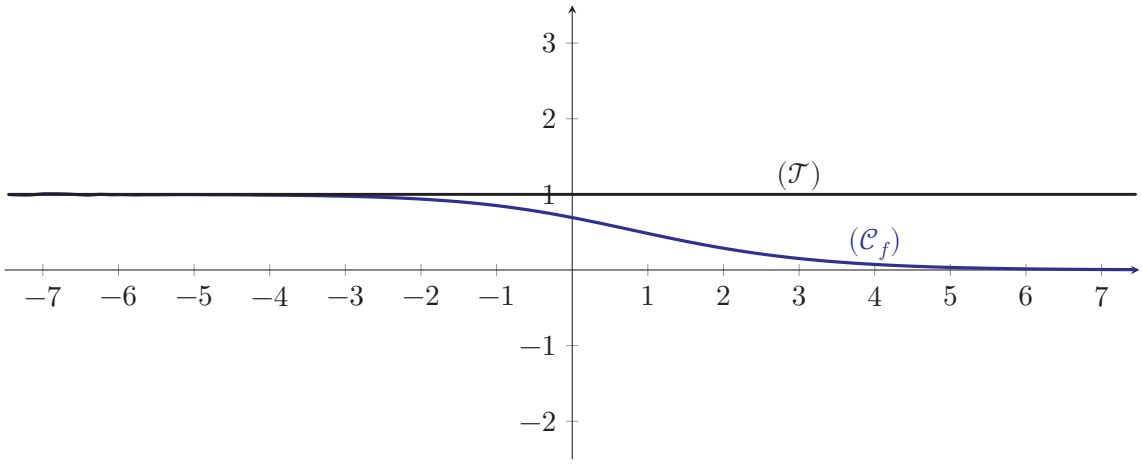
Donc $\boxed{(T) : y = \left(\dfrac{1}{2} - \ln 2\right)x + \ln 2}$

0.25 pt **b)** Vérifions que la tangente (T) passe par le point $A\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$

On a $\left(\dfrac{1}{2} - \ln 2\right) \times x_A + \ln 2 = \left(\dfrac{1}{2} - \ln 2\right) \times 1 + \ln 2 = \dfrac{1}{2} - \ln 2 + \ln 2 = \dfrac{1}{2} = y_A$

Donc $\boxed{A\left(1; \dfrac{1}{2}\right) \in (T)}$

0.75 pt **c)** Construisons (T) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$(On prend $\ln 2 \approx 0.7$)



0.5 pt **4 - a)** Montrons que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera (Il n'est pas demandé de déterminer $f^{-1}(x)$)

f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J tel que :

$J = f(\mathbb{R}) = f(]-\infty;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[=]0;1[$

Finalement $J =]0;1[$

0.5 pt **b)** Vérifions que f^{-1} est dérivable en $\ln 2$ et calculons $\left(f^{-1}\right)'\left(\ln 2\right)$

On a $f(0) = \ln 2$ et $f'(0) = \dfrac{1}{2} - \ln 2 \neq 0$

Donc f^{-1} est dérivable en $\ln 2$ et $\left(f^{-1}\right)'\left(\ln 2\right) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - \ln 2} = \dfrac{2}{1-2\ln 2}$

Finalement $\left(f^{-1}\right)'\left(\ln 2\right) = \dfrac{2}{1-\ln 4}$

5 - Soit λ un réel strictement positif

0.25 pt **a)** Vérifions que $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, pour tout x de $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On a $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}(1+\mathrm{e}^{-x})} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+1}$

Finalement $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$; $\forall x \in \mathbb{R}$

0.5 pt **b)** Montrons que $\displaystyle\int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x = \ln(2) - \ln(1+\mathrm{e}^{-\lambda})$

$$\int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x = \int_0^{\lambda} \frac{\mathbf{e}^{-x}}{1+\mathbf{e}^{-x}}\mathbf{d}x$$

$$= -\int_0^{\lambda} -\frac{\mathbf{e}^{-x}}{1+\mathbf{e}^{-x}}\mathbf{d}x$$

$$= -\int_0^{\lambda} \frac{(1+\mathbf{e}^{-x})'}{1+\mathbf{e}^{-x}}\mathbf{d}x$$

$$= -\left[\mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-x})\right]_0^{\lambda}$$

$$= -\left(\mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda}) - \mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{0})\right)$$

$$= \mathbf{ln}\,2 - \mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda})$$

Finalement $\boxed{\int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x = \mathbf{ln}\,2 - \mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda})}$

0.5 pt **c)** Montrons que $\int_0^{\lambda} f(x)\mathbf{d}x = \mathbf{ln}(2) - f(\lambda) + \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x$ (Remarquons que $f(x) = \frac{1}{1+\mathbf{e}^x} - f'(x)$)

$$\int_0^{\lambda} f(x)\mathbf{d}x = \int_0^{\lambda} \mathbf{e}^{-x}\Big(\mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^x)\Big))\mathbf{d}x$$

$$= \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x} - f'(x)\mathbf{d}x(\text{ d'après la remarque donnée })$$

$$= \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x - \int_0^{\lambda} f'(x)\mathbf{d}x$$

$$= \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x - [f(x)]_0^{\lambda}$$

$$= \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x - (f(\lambda) - f(0))$$

$$= f(0) - f(\lambda) + \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x$$

$$= \mathbf{ln}\,2 - f(\lambda) + \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x$$

Finalement $\boxed{\displaystyle\int_0^{\lambda} f(x)\mathbf{d}x = \mathbf{ln}\,2 - f(\lambda) + \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x}$

0.5 pt **d)** Déduisons en fonction de λ, l'aire A_λ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$

$$A_\lambda = \int_0^{\lambda} |f(x)|\mathbf{d}x\text{u.a.}$$

$$= \int_0^{\lambda} f(x)\mathbf{d}x\text{u.a.(car } f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R})$$

$$= \mathbf{ln}\,2 - f(\lambda) + \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+\mathbf{e}^x}\mathbf{d}x\text{u.a.(d'après la question précédente)}$$

$$= \mathbf{ln}\,2 - f(\lambda) + \mathbf{ln}\,2 - \mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda})\text{u.a.(d'après la question } II)5-b)$$

$$= 2\,\mathbf{ln}\,2 - \mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda}) - \mathbf{e}^{-\lambda}\,\mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda})\text{u.a.}$$

Finalement $\boxed{A_\lambda = 2\,\mathbf{ln}\,2 - \mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda}) - \mathbf{e}^{-\lambda}\,\mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda})\text{ u.a.}}$

0.5 pt **e)** Calculons $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = \lim_{\lambda\to+\infty}\left(2\,\mathbf{ln}\,2 - \mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda}) - \mathbf{e}^{-\lambda}\,\mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda})\right)$$

$$= 2\,\mathbf{ln}\,2\text{(car : } \lim_{\lambda\to+\infty} \mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda}) = 0 \text{ et } \lim_{\lambda\to+\infty} \mathbf{e}^{-\lambda}\,\mathbf{ln}(1+\mathbf{e}^{-\lambda}) = 0)$$

Finalement $\boxed{\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = 2\,\mathbf{ln}\,2}$

FIN