## Exercice 1 — Session : NORMAL 2024 — 3 Pts

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{1+u_n}$, pour tout entier naturel $n$

**0.25 pt** **1 - a)** Vérifier que $u_{n+1} = 4 - \frac{6}{1+u_n}$, pour tout entier naturel $n$

**0.5 pt** **b)** Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$, pour tout entier naturel $n$

**0.25 pt** **2 - a)** Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1+u_n}$, pour tout entier naturel $n$

**0.5 pt** **b)** Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante et en déduire que $(u_n)$ est convergente.

**3 -** Soit $(v_n)$ la suite numérique définie par $v_n = \frac{2-u_n}{1-u_n}$, pour tout entier naturel $n$

**0.5 pt** **a)** Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$

**0.5 pt** **b)** Montrer que $u_n = 1 + \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$, pour tout entier naturel $n$

**0.5 pt** **c)** Calculer la limite de la suite $(u_n)$.

## Exercice 2 — Session : NORMAL 2024 — 3 Pts

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(-1, 0, -1)$ et $B(1, 2, -1)$, le plan $(P)$ passant par $A$ et de vecteur normal $\vec{n}(2, -2, 1)$ et la sphère $(S)$ de centre $\Omega(2, -1, 0)$ et de rayon 5

**0.25 pt** **1 -** Montrer que $2x - 2y + z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan $(P)$

**0.25 pt** **2 -** Déterminer une équation cartésienne de la sphère $(S)$

**0.5 pt** **3 - a)** Vérifier que la distance du point $\Omega$ au plan $(P)$ est $d(\Omega, (P)) = 3$

**0.5 pt** **b)** En déduire que le plan $(P)$ coupe la sphère $(S)$ suivant un cercle $(T)$ de rayon à déterminer.

**0.5 pt** **4 - a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite ( $\Delta$ ) passant par $\Omega$ et perpendiculaire au plan $(P)$

**0.5 pt** **b)** Montrer que le point $H(0, 1, -1)$ est le centre du cercle $(\Gamma)$

**0.5 pt** **c)** Montrer que la droite $(\Delta)$ est une médiatrice du segment $[AB]$

## Exercice 3 — Session : NORMAL 2024 — 4 Pts

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A$ et $B$ daffixes respectives $a = \sqrt{3}(1 - i)$ et $b = 2 + \sqrt{3} + i$

**0.5 pt** **1 -** Vérifier que $|a| = \sqrt{6}$ et que $\arg(a) = \frac{-\pi}{4}[2\pi]$

**0.75 pt** **2 - a)** Montrer que $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) i$ ; puis vérifier que $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$

**0.75 pt** **b)** En déduire une forme trigonométrique du complexe $b$ puis vérifier que $b^{24}$ est un nombre réel.

**3 -** Soit $R$ la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$, qui transforme chaque point $M$ du plan d'affixe $z$ en un point $M'$ d'affixe $z'$.

On pose $R(B) = B'$, $R(A) = A'$ et $R(A') = A''$

**0.5 pt** **a)** Vérifier que $z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)z$ et que $\arg(a') \equiv \frac{-\pi}{12}[2\pi]$ où $a'$ est l'affixe du point $A'$

**b)** Montrer que l'affixe du point $A''$ est $a'' = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et en déduire que les points $O, A''$ et $B$ sont alignés. — **0.5 pt**

**c)** Montrer que $b'$, l'affixe du point $B'$, vérifie $b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$ — **0.5 pt**

**d)** En déduire que le triangle $OAB'$ est rectangle en $O$ — **0.5 pt**

## Exercice 4 — Session : NORMAL 2024 — 2 Pts

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

**1 -** Montrer que $p(A) = \frac{1}{3}$, où $A$ est l'évènement "les deux boules tirées portent le même numéro" — **0.5 pt**

**2 -** Montrer que $p(B) = \frac{5}{21}$, où $B$ est l'évènement "La somme des numéros des boules tirées est 4" — **0.5 pt**

**3 -** Calculer $p(A \cap B)$ — **0.5 pt**

**4 -** Les événements $A$ et $B$ sont -ils indépendants ? Justifier. — **0.5 pt**

## Exercice 5 — Session : NORMAL 2024 — 8 Pts

### Partie I

On considère les deux fonctions $u$ et $v$ définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$

**1 -** Tracer dans un même repère orthonormé les courbes $(\mathcal{C}_u)$ et $(\mathcal{C}_v)$ des fonctions $u$ et $v$ — **0.5 pt**

**2 -** Justifier graphiquement que $e^x - x > 0$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ — **0.25 pt**

**3 -** Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_u)$, la courbe $(\mathcal{C}_v)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ — **0.5 pt**

### Partie II

On considère la fonction numérique $f$ définie par $f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$.

**1 - a)** Vérifier que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ — **0.25 pt**

**b)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - \ln(1 - xe^{-x})$ — **0.5 pt**

**c)** En déduire que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, puis interpréter géométriquement ce résultat. — **0.5 pt**

**2 - a)** Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ — **0.25 pt**

**b)** Vérifier que pour tout $x < 0, f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$ — **0.5 pt**

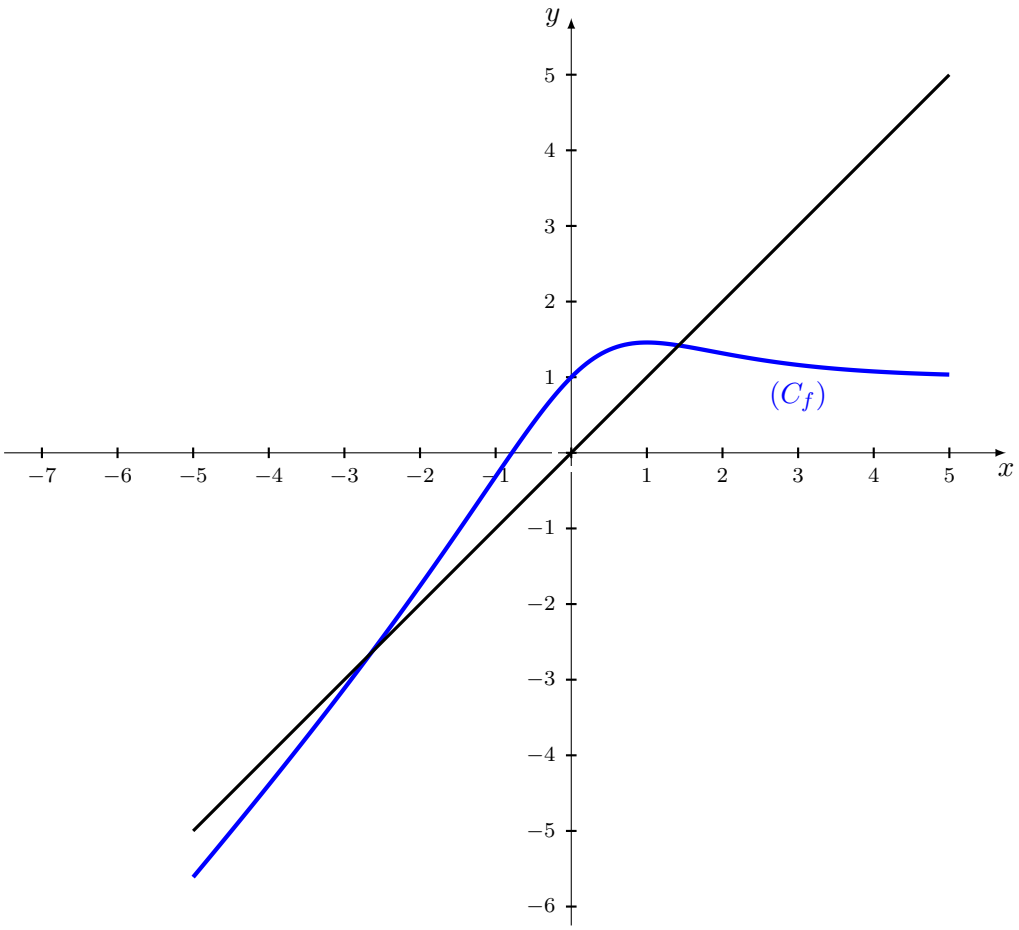
**c)** Calculer $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis déduire que la courbe $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$ — **0.75 pt**

**3 - a)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $f'(x) = \frac{1-x}{e^x - x}$ — **0.5 pt**

**b)** Etudier le signe de la fonction dérivée de $f$, puis déduire le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ — **0.5 pt**

**0.75 pt** **c)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-1, 0[$

**4 -** La courbe $(C_f)$ ci-après est la représentation graphique de $f$ dans un repère orthonormé




**0.5 pt** **a)** Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions $\alpha$ et $\beta$.

**0.5 pt** **b)** Montrer que : $e^{\alpha} - e^{\beta} = \alpha - \beta$

**5 -** Soit $g$ la restriction de la fonction $f$ sur $I = ]-\infty, 1]$

**0.5 pt** **a)** Montrer que $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ que l'on déterminera.

(Il n'est pas demandé de déterminer $g^{-1}(x)$ )

**0.75 pt** **b)** Vérifier que $g^{-1}$ est dérivable en 1. Et calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$

FIN