ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2025

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 : (3 pts)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2 + u_n}$, pour tout entier naturel n

0.25 pt **1 - a) Vérifions que** $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ u_{n+1} = 3 - \frac{4}{2+u_n}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} 3 - \frac{4}{2+u_n} &= \frac{3 \times (2+u_n)}{1 \times (2+u_n)} - \frac{4}{2+u_n} \\ &= \frac{3 \times (2+u_n) - 4}{2+u_n} \\ &= \frac{3 \times 2 + 3 \times u_n - 4}{2+u_n} \\ &= \frac{6 + 3u_n - 4}{2+u_n} \\ &= \frac{3u_n + 2}{2+u_n} \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ u_{n+1} = 3 - \frac{4}{2+u_n}}$.

0.5 pt **b) Montrons par récurrence que** $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ 0 < u_n < 2$.

Pour $n = 0$ on a : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $0 < \frac{3}{2} < 2$

donc $0 < u_0 < 2$, alors la proposition est vraie pour $n = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < u_n < 2$ et montrons que $0 < u_{n+1} < 2$

On a d'après l'hypothese :

$$0 < u_n < 2 \implies 0+2 < u_n+2 < 2+2$$

$$\implies 2 < u_n+2 < 4$$

$$\implies \frac{1}{4} < \frac{1}{u_n+2} < \frac{1}{2}$$

$$\implies \frac{-4}{2} < \frac{-4}{u_n+2} < \frac{-4}{4}$$

$$\implies -2 < -\frac{4}{u_n+2} < -1$$

$$\implies 3-2 < 3-\frac{4}{u_n+2} < 3-1$$

$$\implies 1 < u_{n+1} < 2$$

$$\implies 0 < u_{n+1} < 2 \qquad \text{car } 0 < 1$$

d'où d'après le principe de récurrence, on a : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ 0 < u_n < 2}$

0.25 pt **2 - a) Montrons que** $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1+u_n)(2-u_n)}{2+u_n}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+2}{2+u_n} - u_n$$

$$= \frac{3u_n+2}{2+u_n} - \frac{u_n(2+u_n)}{2+u_n}$$

$$= \frac{3u_n+2-u_n(2+u_n)}{2+u_n}$$

$$= \frac{3u_n+2-2u_n-u_n\times u_n}{2+u_n}$$

$$= \frac{-u_n^2+u_n+2}{2+u_n}$$

$$= \frac{(1+u_n)(2-u_n)}{2+u_n}$$

Car on a : $(1+u_n)(2-u_n) = 2-u_n+2u_n-u_n\times u_n = -u_n^2+u_n+2$

D'où $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1+u_n)(2-u_n)}{2+u_n}}$

0.5 pt **b) Montrons que la suite** (u_n) **est croissante**

On a : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1+u_n)(2-u_n)}{2+u_n}$

Et on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ 0 < u_n < 2.$

Donc $1 < 1+u_n < 2$ et $2 < 2+u_n < 4$ et $-2 < -u_n < 0$

Donc $0 < 1+u_n$ et $0 < 2+u_n$ et $0 < 2-u_n < 2$

donc $\dfrac{(1+u_n)(2-u_n)}{2+u_n} > 0$

Alors $u_{n+1} - u_n > 0$

D'où (u_n) est croissante

déduisons que (u_n) est convergent.

On a : (u_n) est croissante et majorée par 2

Donc (u_n) est convergente

0.5 pt **c)** Montrons que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ 0 < 2 - u_{n+1} \leq \frac{2}{7}(2 - u_n)$.

On a d'après questions 1) $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ 0 < u_n < 2$.

Alors $0 < u_{n+1} < 2$. donc $2 - u_{n+1} > 0$ (*)

Et on a :

$$\begin{aligned} 2 - u_{n+1} &= 2 - \frac{3u_n + 2}{2 + u_n} \\ &= \frac{2(2 + u_n)}{2 + u_n} - \frac{3u_n + 2}{2 + u_n} \\ &= \frac{2(2 + u_n) - (3u_n + 2)}{2 + u_n} \\ &= \frac{4 + 2u_n - 3u_n - 2}{2 + u_n} \\ &= \frac{2 - u_n}{2 + u_n} \\ &= \frac{1}{2 + u_n}(2 - u_n) \end{aligned}$$

D'autre part, on a (u_n) est croissante alors $u_n > \frac{3}{2}$

donc $\frac{3}{2} < u_n < 2$ donc $\frac{3}{2} + 2 < u_n + 2 < 2 + 2$

donc $\frac{7}{2} < 2 + u_n < 4$ donc $\frac{1}{4} < \frac{1}{2 + u_n} < \frac{2}{7}$

donc $\frac{1}{4}(2 - u_n) < \frac{1}{2 + u_n}(2 - u_n) < \frac{2}{7}(2 - u_n)$

d'où $2 - u_{n+1} < \frac{2}{7}(2 - u_n)$ (**)

D'après (*) et (**) on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ 0 < 2 - u_{n+1} \leq \frac{2}{7}(2 - u_n)$

0.5 pt **d) Déduisons que** $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ 0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n$

on a $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ 0 < u_n < 2$ donc $2 - u_n > 0$ (I)

Alors il suffit de montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ 2 - u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n$.

Pour $n = 0$, on a : $2 - u_0 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{4 - 3}{2} = \frac{1}{2}$

et on a $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^0 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

Donc $2 - u_0 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^0$

Alors la proposition est vraie.

Soit $n\mathbb{N}$, supposons que $2-u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n$ et montrons que $2-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}$

On a : $2-u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n$ donc $\frac{2}{2}(2-u_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n \times \left(\frac{2}{7}\right)$

Donc $\frac{2}{2}(2-u_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}$

comme $2-u_{n+1} < \frac{2}{7}(2-u_n)$

Alors $2-u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}$

D'où d'après le principe de récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ 2-u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n$. (II)

D'après (I) et (II) on a : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ 0 < 2-u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n}$

0.5 pt **e) Déterminons la limite de la suite** (u_n)

on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ 0 < 2-u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n$.

et $\lim 0 = 0$ et $\lim \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{2}{7} < 1$

Alors $\boxed{\lim u_n = 2}$

Exercice 2 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(0,3,3)$, $B(1,2,1)$, $C(2,3,1)$ et le vecteur $\vec{n}(1,-1,1)$

Soit (P) le plan d'équation $x-y+z-6=0$

0.5 pt **1 - a) Montrons que** $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{n}$ **et déduisons que les points** A, B **et** C **sont non alignés**

- On a : $\overrightarrow{AB}(1-0,2-3,1-3)$ ç.a.d. $\overrightarrow{AB}(1,-1,-2)$

Et : $\overrightarrow{AC}(2-0,3-3,1-3)$ ç.a.d. $\overrightarrow{AC}(2,0,-2)$

Donc : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$

$= (2-0)\vec{i} - (-2+4)\vec{j} + (0+2)\vec{k} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} = 2(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = 2\vec{n}$ car : $\vec{n}(1,-1,1)$

Finalement : $\boxed{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{n}}$

- On a : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{O}$ donc $\boxed{A, B \text{ et } C \text{ ne sont pas alignés}}$

0.25 pt **b) Montrons que les plans** (ABC) **et** (P) **sont parallèles**

On a : $\vec{n}(1,-1,1)$ est un vecteur normal au plan (p) et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{n}(2,-2,2)$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Or $\vec{n}$ et $2\vec{n}$ sont colinéaires

Donc (P) et (ABC) parallèles

2 - Soit (S) la sphère telle que : le plan (ABC) est tangent à (S) en A et le plan (P) est tangent à (S) en un point H

0.5 pt **a) Calculons la distance du point A au plan (P) et déduisons que le rayon de la sphère (S) est $\sqrt{3}$**

- On a :$d(A,(P)) = \dfrac{|x_A - y_A + z_A - 6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \dfrac{|0-3+3-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}}{3}$

Alors $d(A,(P)) = 2\sqrt{3}$

- On a $d(A,(P)) = 2R$ Donc $2R = 2\sqrt{3}$

Alors $R = \sqrt{3}$

0.25 pt **b) Donnons une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et orthogonale au plan (P)**

On a (Δ) est orthogonal à (p)

Donc $\vec{n}(1,-1,1)$ qui est normal à (p) est directeur de la droite (Δ)

et $A(0,3,3) \in (\Delta)$

Donc $(\Delta) : \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}$

0.5 pt **c) Montrons que les coordonnées du point H sont $(2,1,5)$**

On a H est l'intersection de la droite (Δ) et le plan (P)

Donc $\begin{cases} x_H = t \\ y_H = 3 - t \\ z_H = 3 + t \\ x_H - y_H + z_H - 6 = 0 \end{cases}$

Dpnc $t - 3 + t + 3 + t - 6 = 0$

Donc $3t - 6 = 0$

Donc $t = 2$

Donc $\begin{cases} x_H = 2 \\ y_H = 3 - 2 = 1 \\ z_H = 3 + 2 = 5 \end{cases}$

Alors $\boxed{H(2,1,5)}$

0.5 pt **d) Montrons que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z + 18 = 0$ est une équation cartésienne de la sphère (S)**

(S) la sphère de diamètre $[AH]$, donc son centre est Ω milieu de $[AH]$

Donc $\Omega\left(\frac{0+2}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{3+5}{2}\right) \Rightarrow \Omega(1,2,4)$

Et son rayon $R = \sqrt{3}$

Donc $(S) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = (\sqrt{3})^2$

ç.a.d. $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z + 1 + 4 + 16 = 3$

Alors $\boxed{(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z + 18 = 0}$

0.5 pt **3 - Déterminons les deux points d'intersection de la droite (BH) et la sphère (S)**

On a $\overrightarrow{BH}(1,-1,4)$ est un vecteur directeur de la droite (BH) et $H(2,1,5) \in (BH)$

Donc $(BH) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$

Et on a : $(S) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 3$

Les coordonnées des points d'intersection sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 5 + 4t \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 3 \end{cases}$$

Résolvant ce système par substitution :

On a $(2 + t - 1)^2 + (1 - t - 2)^2 + (5 + 4t - 4)^2 = 3$

$(1 + t)^2 + (-1 - t)^2 + (1 + 4t)^2 = 3$

$1 + 2t + t^2 + 1 + 2t + t^2 + 1 + 8t + 16t^2 = 3$

$18t^2 + 12t + 3 = 3$

$18t^2 + 12t = 0$

$6t(3t + 2) = 0$

$t = 0$ ou $t = -\dfrac{2}{3}$

On obtient ainsi $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3} \\ y = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3} \\ z = 5 + 4 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) = 5 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{7}{3} \end{cases}$

Alors Les points d'intersection de $(8H)$ et (s) sont : $H(2, 1, 5)$ et $K\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$

Exercice 3 : (3.5 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a = \dfrac{-\sqrt{3} + i}{2}$, $b = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, $c = 1 + a$ et $d = \bar{c}$

0.5 pt **1 - Vérifions que $|a| = 1$ et que $\arg(a) \equiv \dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$**

On a : $a = \dfrac{-\sqrt{3} + i}{2} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

- **Module** : On a $|a| = \left|\dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{4}{4}} = \sqrt{1}$

Finalement $|a| = 1$

- **Argument** : On a : $a = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$= -\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

Donc : $\arg(a) \equiv \dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$

0.75 pt **2 - Vérifions que $\dfrac{c-d}{c-a} = i$ et déduisons que le triangle ACD est isocèle rectangle en C**

- On a : $c = 1 + a$ et $d = \bar{c} = 1 + \bar{a}$

Donc : $\dfrac{c-d}{c-a} = \dfrac{(1+a) - (1+\bar{a})}{(1+a) - a} = \dfrac{a - \bar{a}}{1} = 2i\,\mathrm{Im}(a) = 2i \times \dfrac{1}{2}$

Finalement : $\dfrac{c-d}{c-a} = i$

- On a : $\dfrac{c-d}{c-a} = i$

Donc $\left|\dfrac{c-d}{c-a}\right| = |i| = 1$ et $arg\left(\dfrac{c-d}{c-a}\right) \equiv arg(i)[2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Ainsi $DC = AC$ et $(\widehat{\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{AC}}) = \dfrac{\pi}{2}$

Donc le triangle ACD est isocèle rectangle en C

0.5 pt **3 - a) Montrons que $d-a=1-i$ et que $b-d=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$**

- $d-a=(1+\bar{a})-a=1-(a-\bar{a})=1-2i\text{Im}(a)=1-2i\times\frac{1}{2}$

Finalement : $d-a=1-i$

- $b-d=b-\bar{c}=b-\overline{(1+a)}=b-(1+\bar{a})=b-1-\bar{a}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}-1-\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$

$=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{2}-\frac{-\sqrt{3}-i}{2}=\frac{1-i\sqrt{3}-2+\sqrt{3}+i}{2}=\frac{\sqrt{3}-1-i(\sqrt{3}-1)}{2}$

Finalement : $b-d=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$

0.25 pt **b) Déduisons que les points A, D et B sont alignés**

Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires car : $b-d=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(d-a)$

avec $\frac{\sqrt{3}-1}{2}\in\mathbb{R}$

Donc les points A, D et B sont alignés

4 - Soit R la transformation du plan qui transforme chaque point M d'affixe z en M' d'affixe z' tel que $z'=az$

0.5 pt **a) Vérifions que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle**

On a R est la transformation définie par $z'=az$

Et on a $|a|=1$ et $arg(a)\equiv\frac{5\pi}{6}$

Donc $a=\mathbf{e}^{i\frac{5\pi}{6}}$

Alors : $z'-0=\mathbf{e}^{i\frac{5\pi}{6}}(z-0)$

Ainsi R est la rotation de centre O (**origine du repère**) et d'angle $\frac{5\pi}{6}$

0.5 pt **b) Vérifions que $ad=c$ et déduisons que $R(D)=C$**

- $ad=a\bar{c}=a(1+\bar{a})=a+a\bar{a}=a+|a|^2=a+1$ (car$|a|=1$) $=c$ Finalement :

$ad=c$

- On a $ad=c$, ç.a.d. $c=ad$ Donc, d'après l'expression de la rotation R

Le point C est l'image du point D par la rotation R

Ainsi : $R(D)=C$

0.5 pt **c) Montrons que $\mathbf{arg}(c)\equiv\frac{5\pi}{12}[2\pi]$**

On a $c=ad$, donc $arg(c)\equiv arg(ad)[2\pi]\equiv arg(a)+arg(d)[2\pi]\equiv arg(a)+arg(\bar{c})[2\pi]$

$\equiv arg(a)-arg(c)[2\pi]$

Donc $2arg(c) \equiv arg(a)[2\pi]$ Donc $arg(c) \equiv \frac{1}{2}arg(a)[\pi] \equiv \frac{1}{2} \times \frac{5\pi}{6}[\pi]$

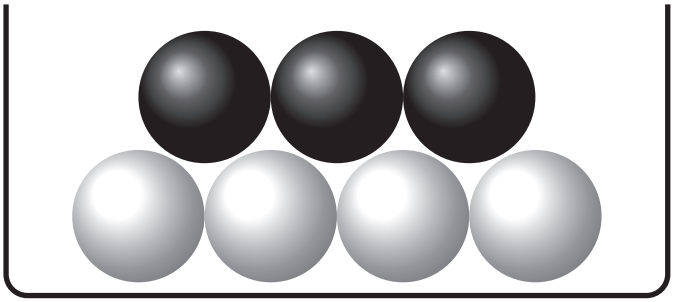
Or $c = 1 + a = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Donc $Re(c) > 0$ et $Im(c) > 0$

Alors : $\boxed{\textbf{arg}(c) \equiv \frac{5\pi}{12}[2\pi]}$

Exercice 4 : (2.5 pts)

Un sac contient 4 boules blanches et 3 boules noires. (Les boules sont indiscernables au toucher)



Le sac

Un jeu consiste à tirer successivement et sans remise deux boules du sac

Les règles du jeu sont comme suit :

- Si les deux boules tirées sont blanches, on note : +5
- Si les deux boules tirées sont noires, on note : -5
- Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, on note : 0

On considère les évènements : G « noter +5 » ; Z « noter 0 »

N_1 « La première boule tirée est noire » ; B_2 « la deuxième boule tirée est blanche »

0.5 pt **1 - a)** Calculons $p(G)$, la probabilité de l'événement G :

Le tirage est successivement et sans remise de deux boules du sac qui contient 7 boules,

donc le nombres de tirages possibles est $card(\Omega) = A_7^2 = 7 \times 6 = 42$.

Les boules sont indiscernables au toucher, donc on a équiprobabilité.

Donc $p(G) = \frac{card(G)}{card(\Omega}$.

On a G ≪noter +5≫ c'est à dire qu'on tire deux boules blanches, et par suite

$card(\Omega) = A_4^2 = 4 \times 3 = 12$. Donc $\boxed{p(G) = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}.}$

0.5 pt **b)** Montrons que la probabilité de l'événement Z est $p(Z) = \frac{4}{7}$:

On a Z ≪noter 0≫ c'est à dire qu'on obtient deux boule de couleurs différentes. (la

première blanche et la deuxième noire ou la première noire et la deuxième blanche).

Donc $p(Z) = \dfrac{(A_4^2 \times A_3^1) \times 2}{42} = \dfrac{4 \times 3 \times 2}{42} = \dfrac{4}{7}$. D'où $\boxed{p(Z) = \dfrac{4}{7}.}$

0.5 pt **2 - a)** Calculons la probabilité $p(N_1 \cap B_2)$:

On a $N_1 \cap B_2$ ≪Le première boule est noire et la deuxième est blanche ≫, donc $p(N_1 \cap B_2) = \dfrac{A_3^2 \times A_4^1}{42} = \dfrac{2}{7}$. D'où $\boxed{p(N_1 \cap B_2) = \dfrac{2}{7}.}$

0.5 pt **b)** Montrons que $p(B_2) = \dfrac{4}{7}$:

On a B_2 ≪la deuxième boule tirée est blanche≫ c'est à dire que la première tirée boule est noire et la deuxième est blanche ou le deux boules tirées sont blanches. Donc $p(B_2) = \dfrac{A_4^1 \times A_3^1 + A_4^2}{42} = \dfrac{12 + 12}{42} = \dfrac{24}{42} = \dfrac{4}{7}$. D'où $\boxed{p(B_2) = \dfrac{4}{7}.}$

0.5 pt **c)** Déduisons la probabilité de ≪noter 0≫ sachant que la deuxième boule tirée est blanche :

La probabilité demandée est la probabilité de Z sachant que B_2 est réalisé $p(Z|B_2)$, et on sait que $p(Z|B_2) = \dfrac{p(Z \cap B_2)}{p(B_2)}$.

Calculons $p(Z \cap B_2)$:

On a $Z \cap B_2$ est réalisé si et seulement si la première tirée boule est noire et la deuxième est blanc, donc $p(Z \cap B_2) = \dfrac{A_3^1 \times A_4^1}{42} = \dfrac{12}{42} = \dfrac{1}{7}$.

Par suite $p(Z|B_2) = \dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{4}{7}} = \dfrac{1}{4}$.

D'où $\boxed{p(Z|B_2) = \dfrac{1}{4}.}$

Problème : (8 pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{\mathbf{e}^x + 2}$

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

0.5 pt **1 -** Calculons $f(0)$ et $f(\ln 2)$

- $f(0) = 0 - 1 + \dfrac{4}{\mathbf{e}^0 + 2} = -1 + \dfrac{4}{1+2} = -1 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3}$
- $f(\ln 2) = \ln 2 - 1 + \dfrac{4}{\mathbf{e}^{\ln 2} + 2} = \ln 2 - 1 + \dfrac{4}{2+2} = \ln 2 - 1 + \dfrac{4}{4} = \ln 2$

Donc : $f(0) = \dfrac{1}{3}$ et $f(\ln 2) = \ln 2$

0.5 pt **2 - a)** Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

- Comme : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{\mathbf{e}^x+2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}$

  Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x-1+\dfrac{4}{\mathbf{e}^x+2} = +\infty$

- Comme : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{\mathbf{e}^x+2} = \dfrac{4}{0+2} = 2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x-1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \end{cases}$

  Alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x-1+\dfrac{4}{\mathbf{e}^x+2} = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

0.5 pt **b)** Vérifions que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1)) = 0$ puis interprétons géométriquement ce résultat

Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1)) = \lim\limits_{x\to+\infty} x-1+\dfrac{4}{e^x+2}-(x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{e^x+2} = 0$

Alors : (C_f) admet une asymptote oblique d'équation $y = x-1$ au voisinage de $+\infty$

0.25 pt **3 - a)** Vérifions que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x+1-\dfrac{2\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x+2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
x+1-\frac{2\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x+2} &= x+\frac{e^x+2-2\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x+2} \\
&= x+\frac{-\mathbf{e}^x+2}{\mathbf{e}^x+2} \\
&= x+\frac{-\mathbf{e}^x-2+2+2}{\mathbf{e}^x+2} \\
&= x+\frac{-(\mathbf{e}^x+2)+4}{\mathbf{e}^x+2} \\
&= x-\frac{\mathbf{e}^x+2}{\mathbf{e}^x+2}+\frac{4}{\mathbf{e}^x+2} \\
&= x-1+\frac{4}{\mathbf{e}^x+2} \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

0.5 pt **b)** Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x+2}$ puis déduisons que la droite d'équation $y = x+1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

- Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x+2}$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x+2} = 0$ car : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^x+2 = 2$

- Déduisons que la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

  Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

  Et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 - \dfrac{2\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x+2} - (x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{2\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x+2} = 0$

Donc la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

0.5 pt **c)** Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < f(x) - x < 1$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) - (x-1) = \dfrac{4}{e^x+2}$

Puisque $e^x > 0$, alors $\dfrac{4}{e^x+2} > 0$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) - (x-1) > 0$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) - x > -1$ (1)

Or $f(x) - (x+1) = -\dfrac{2\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x+2}$

Puisque $e^x > 0$, alors $-\dfrac{2\mathbf{e}^x}{\mathbf{e}^x+2} < 0$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) - (x+1) < 0$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) - x < 1$ (2)

D'après (1) et (2) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < f(x) - x < 1$

0.5 pt **4 - a)** Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\mathbf{e}^{2x}+4}{(\mathbf{e}^x+2)^2}$

On sait que la fonction $x \mapsto x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Et aussi la fonction $x \mapsto \mathbf{e}^x + 2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$

Alors la fonction $\dfrac{4}{\mathbf{e}^x+2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, par suit la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme la somme des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 0 - \frac{4(e^x+2)'}{(e^x+2)^2} \\ &= 1 - \frac{4e^x}{(e^x+2)^2} \\ &= \frac{(e^x+2)^2 - 4e^x}{(e^x+2)^2} \\ &= \frac{e^{2x}+4e^x+4-4e^x}{(e^x+2)^2} = \frac{e^{2x}+4}{(e^x+2)^2} \end{aligned}$$

Donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\mathbf{e}^{2x}+4}{(\mathbf{e}^x+2)^2}$

0.25 pt **b)** Déduisons que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$; $e^{2x} + 4 > 0$ et $(e^x + 2)^2 > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) > 0$

Alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

0.5 pt **5 - a)** Montrons que pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$

Soit g une fonction définie par : $g(x) = f(x) - m$;$(m \in \mathbb{R})$

▶ La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$

▶ La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

▶ $g(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} g(x); \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[= \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - m; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - m\right[=]-\infty; +\infty[$

Donc $0 \in g(\mathbb{R})$

Alors l'équation $g(x) = 0$ $(f(x) - m = 0)$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$

l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$

b) Soit α l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$

0.5 pt Vérifions que $-1 < \alpha < 0$

$$\begin{cases} f(-1) = -1 - 1 + \dfrac{4}{e^{-1}+2} = \dfrac{-2e^{-1} - 4 + 4}{e^{-1}+2} = -\dfrac{2e^{-1}}{e^{-1}+2} \\ f(\alpha) = 0 \\ f(0) = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-1) =< 0 \\ f(\alpha) = 0 \\ f(0) > 0 \end{cases}$$

Donc $f(-1) < f(\alpha) < f(0) \Rightarrow -1 < \alpha < 0$ (car f est strictement croissante su $\mathbb{R}$)

D'où : $-1 < \alpha < 0$

Montrer que $\mathbf{e}^{\alpha} = \dfrac{2(1+\alpha)}{1-\alpha}$

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow \alpha - 1 + \frac{4}{e^{\alpha}+2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{e^{\alpha}+2} = 1 - \alpha \\ &\Leftrightarrow e^{\alpha} + 2 = \frac{4}{1-\alpha} \quad , \text{car } 1 - \alpha \neq 0 \\ &\Leftrightarrow e^{\alpha} = \frac{4}{1-\alpha} - 2 \\ &\Leftrightarrow e^{\alpha} = \frac{4 - 2 + 2\alpha}{1-\alpha} \\ &\Leftrightarrow e^{\alpha} = \frac{2(1+\alpha)}{1-\alpha} \end{aligned}$$

Donc : $\mathbf{e}^{\alpha} = \dfrac{2(1+\alpha)}{1-\alpha}$

0.5 pt **6 - a)** Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{4\mathbf{e}^{x}(\mathbf{e}^{x}-2)}{(\mathbf{e}^{x}+2)^{3}}$

On sait que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$(\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad (e^{x}+2)^{2} \neq 0)$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = \left(\frac{\mathbf{e}^{2x}+4}{(\mathbf{e}^{x}+2)^{2}}\right)'$$

$$= \frac{2\mathbf{e}^{2x}(\mathbf{e}^{x}+2)^{2} - 2e^{x}(e^{x}+2)(e^{2x}+4)}{(\mathbf{e}^{x}+2)^{4}}$$

$$= \frac{2e^{x}(\mathbf{e}^{x}+2)\left(e^{x}(e^{x}+2) - (e^{2x}+4)\right)}{(\mathbf{e}^{x}+2)^{4}}$$

$$= \frac{2e^{x}(\mathbf{e}^{x}+2)\left(e^{2x}+2e^{x}-e^{2x}-4\right)}{(\mathbf{e}^{x}+2)^{4}}$$

$$= \frac{4e^{x}(\mathbf{e}^{x}+2)\left(e^{x}-2\right)}{(\mathbf{e}^{x}+2)^{4}}$$

$$= \frac{4e^{x}\left(e^{x}-2\right)}{(\mathbf{e}^{x}+2)^{3}}$$

Donc : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{4\mathbf{e}^{x}(\mathbf{e}^{x}-2)}{(\mathbf{e}^{x}+2)^{3}}$

0.25 pt **b)** Étudions le signe de $\mathbf{e}^{x}-2$ sur $\mathbb{R}$

$\mathbf{e}^{x}-2 = 0 \Leftrightarrow e^{x} = 2 \Leftrightarrow x = \mathbf{ln}(2)$

- Si $x > \mathbf{ln}(2)$

  $x > \mathbf{ln}(2) \Leftrightarrow e^{x} > e^{\mathbf{ln}\,2}$ (la fonction Exp est strictement croissante)

  Donc : $e^{x}-2 > 0$

- Si $x < \mathbf{ln}(2)$

  $x < \mathbf{ln}(2) \Leftrightarrow e^{x} < e^{\mathbf{ln}\,2}$ (la fonction Exp est strictement croissante)

  Donc : $e^{x}-2 < 0$

  Finalement le signe de $\mathbf{e}^{x}-2$ sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$		$\mathbf{ln}\,2$		$+\infty$
$e^{x}-2$		$-$	0	$+$	

0.5 pt **c)** Déduisons que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion que l'on déterminerons

On sait que $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{x} > 0 \quad ; \quad (\mathbf{e}^{x}+2)^{3} > 0$

Donc le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le signe de $\mathbf{e}^x - 2$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Puisque $f''(x)$ s'annule et change de signe en $\ln 2$

Donc la courbe (C_f) admet un point d'inflexion $A(\ln 2, \ln 2)$

0.5 pt **d)** Montrons que $y = \frac{1}{2}x + \frac{\ln 2}{2}$ est l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $\ln 2$

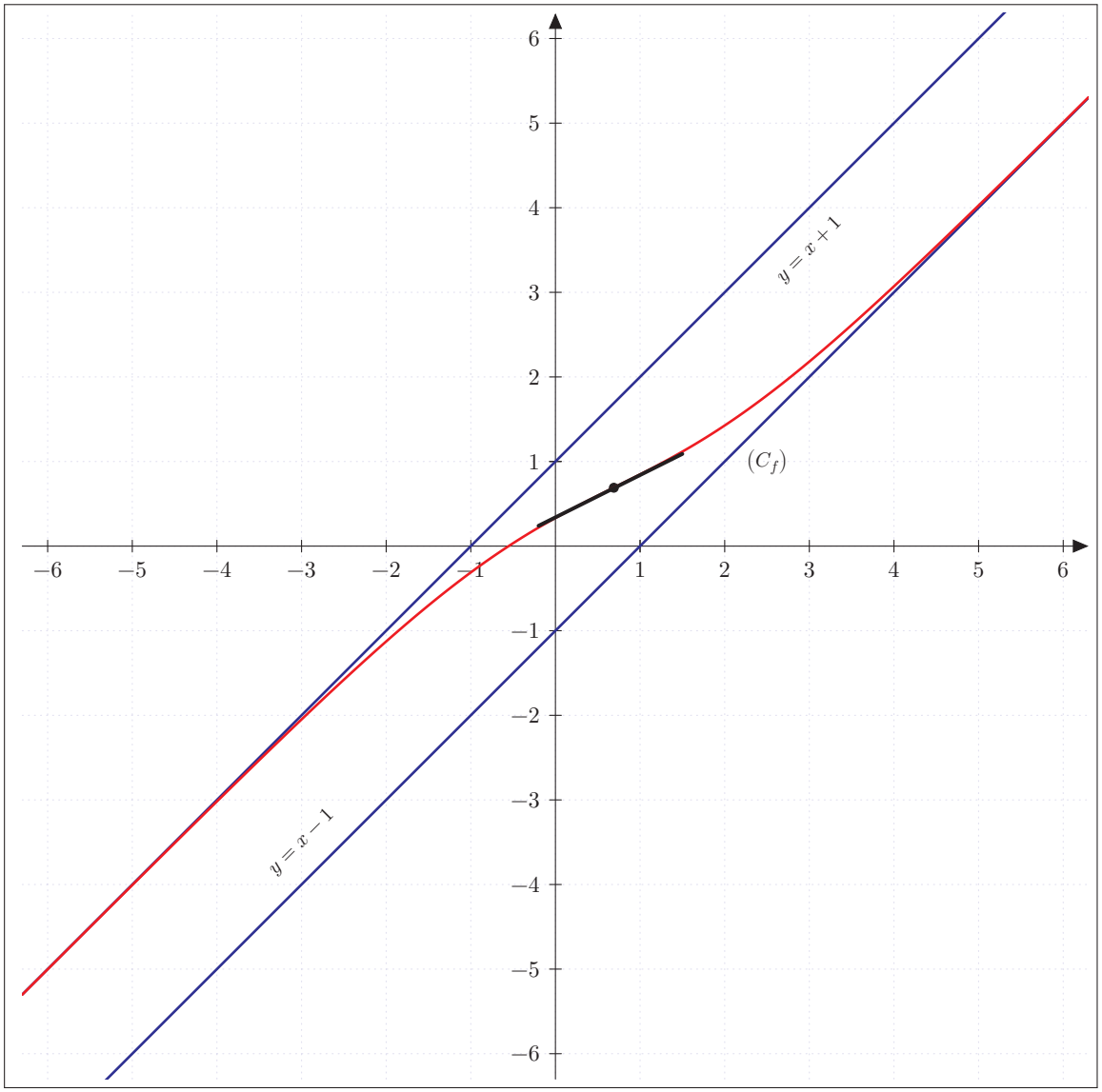
f est dérivable sur $\ln 2$ et que $f'(\ln 2) = \frac{e^{2\ln 2} + 4}{(e^{\ln 2} + 2)^2} = \frac{e^{\ln 4} + 4}{(e^{\ln 2} + 2)^2} = \frac{8}{4^2} = \frac{1}{2}$

Donc l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $\ln 2$ est :

$y = f'(\ln 2)(x - \ln 2) + f(\ln 2) = \frac{1}{2}(x - \ln 2) + \ln 2 = \frac{1}{2}x - \frac{\ln 2}{2} + \ln 2 = \frac{1}{2}x + \frac{\ln 2}{2}$

Donc : $y = \frac{1}{2}x + \frac{\ln 2}{2}$ est l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $\ln 2$

0.75 pt **7 -** Construisons la courbe (C_f) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$



0.5 pt **8 - a)** Montrons que $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x+2}dx &= \int_0^{\ln 2} \frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+2)}dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} \frac{-2e^{-x}}{1+2e^{-x}}dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} \frac{(1+2e^{-x})'}{1+2e^{-x}}dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\ln 2} (\ln(1+2e^{-x}))'dx \\
&= -\frac{1}{2}[\ln(1+2e^{-x})]_0^{\ln 2} \\
&= -\frac{1}{2}(\ln(1+2e^{-\ln 2}) - \ln(1+2e^{-0})) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\frac{2}{e^{\ln 2}}\right) - \ln(1+2\times 1)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\frac{2}{2}\right) - \ln(1+2\times 1)\right) \\
&= -\frac{1}{2}(\ln(2) - \ln(3)) \\
&= \frac{1}{2}(\ln(3) - \ln(2)) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

Donc : $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x+2}dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

0.5 pt **b)** Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), la droite d'équation $y = x-1$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$

0.5 pt Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), la droite d'équation $y = x-1$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$

Donc $\mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} |f(x) - (x-1)|.u.a$

Puisque $\forall x \in [0, \ln 2]$; $f(x) - (x-1) > 0$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^{\ln 2} (f(x) - (x-1))\mathbf{d}x \times u.a \\
&= \int_0^{\ln 2} \left(x - 1 + \frac{4}{e^x + 2} - x + 1\right)\mathbf{d}x \times u.a \\
&= \int_0^{\ln 2} \frac{4}{e^x + 2}\mathbf{d}x \times u.a \\
&= 4\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 2}\mathbf{d}x \times u.a \\
&= \frac{4}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) u.a \\
&= 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) u.a
\end{aligned}$$

Donc l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), la droite d'équation $y = x-1$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$ est : $\mathcal{A} = 2\ln\left(\frac{3}{2}\right) u.a$

FIN