Arithmétique dans $\mathbb{N}$

Tronc commun scientifique • Divisibilité, nombres premiers, PGCD et PPCM

1. Les entiers naturels et la divisibilité

Savoir reconnaître une relation de divisibilité et raisonner sur la parité.

Ensemble et vocabulaire

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ et $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour $a \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}^*$, on dit que d divise a, noté $d \mid a$, s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = dk$. Alors d est un diviseur de a et a est un multiple de d.
Exemple : $4 \mid 28$ car $28 = 4 \times 7$; $5 \nmid 28$. Tout entier naturel non nul admet au moins les diviseurs 1 et lui-même.

Pair ou impair ?

n est **pair** ssi $n = 2k$ pour un $k \in \mathbb{N}$; il est **impair** ssi $n = 2k + 1$. Ainsi 0 est pair et 1 est impair.
Règles utiles : pair $\pm$ pair = pair ; impair $\pm$ impair = pair ; pair $\pm$ impair = impair. Pair $\times$ entier = pair ; impair $\times$ impair = impair.

Application guidée / étudier une parité

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair : deux entiers consécutifs, l'un est pair. Si $n = 2k$, le produit vaut $2[k(n+1)]$; si $n = 2k+1$, il vaut $2[(k+1)n]$.

À faire en classe 01

1. Écrire 84 sous la forme dk pour montrer que $7 \mid 84$. 2. Montrer que le produit de deux entiers impairs est impair. 3. Montrer que la somme de deux entiers de même parité est paire.

2. Critères de divisibilité

Utiliser les chiffres d'un entier écrit en base 10.

Critères à connaître

Diviseur	Critère	Diviseur	Critère
2	chiffre des unités pair	3	somme des chiffres multiple de 3
4	2 derniers chiffres multiples de 4	5	unité égale à 0 ou 5
8	3 derniers chiffres multiples de 8	9	somme des chiffres multiple de 9
11	différence alternée multiple de 11	25	fin : 00, 25, 50 ou 75

Pour 11, compter les rangs depuis les unités : S_1 somme des rangs impairs, S_2 somme des rangs pairs ; $11 \mid n$ ssi $S_1 - S_2$ est multiple de 11.

Application guidée / tester 540

540 est divisible par 2 (unité 0), par 3 et 9 (somme $5 + 4 + 0 = 9$), par 4 (les deux derniers chiffres 40) et par 5 (unité 0). Il n'est pas divisible par 8 car 540 n'est pas multiple de 8.

À faire en classe 02

Sans poser les divisions, tester 7524, 2805, 9360, 5005005 et 91328 pour 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11 et 25. Justifier chaque réponse par un critère.

Divisions et nombres premiers

Quotient et reste ; reconnaître les nombres premiers et factoriser.

3. Division euclidienne

Décomposer exactement un entier naturel par un diviseur non nul.

Théorème de la division euclidienne

Pour $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$a = bq + r, \qquad 0 \leq r < b.$$

a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste. Le reste est strictement inférieur au diviseur ; $r = 0$ exactement quand $b \mid a$.

Application guidée / quotient et reste

Diviser 12357 par 113 : $113 \times 109 = 12317$, donc $12357 = 113 \times 109 + 40$. Le quotient est 109 et le reste 40 ; $0 \leq 40 < 113$ confirme le résultat.

À faire en classe 03

1. Déterminer quotient et reste de 658 par 13. 2. Écrire tous les restes possibles d'une division par 7. 3. Que signifie un reste nul dans la division de a par 9 ?

4. Nombres premiers

Décider si un entier est premier et justifier le test.

Définition et test de primalité

Un entier $p \geq 2$ est **premier** s'il a exactement deux diviseurs positifs : 1 et p. 1 n'est pas premier ; 2 est le seul nombre premier pair. Un entier $n > 1$ non premier est composé.
Pour tester n, essayer les nombres premiers $p \leq \sqrt{n}$. Si aucun ne divise n, alors n est premier. En effet, un facteur non trivial de n serait au plus $\sqrt{n}$.

Application guidée / tester 97

$9^2 < 97 < 10^2$. Les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{97}$ sont $2, 3, 5, 7$. Aucun ne divise 97 : 97 est premier. Pour 217, $217 = 7 \times 31$: il est composé.

À faire en classe 04

1. Dire si 1, 2, 51 et 53 sont premiers, en justifiant. 2. Déterminer un diviseur premier de 299. 3. Quels nombres premiers faut-il tester au maximum pour 53 ?

Décomposer et compter

5. Décomposition en facteurs premiers

Écrire un entier comme produit de nombres premiers et en déduire ses diviseurs.

Tout entier $n \geq 2$ possède une décomposition unique, à l'ordre des facteurs près.

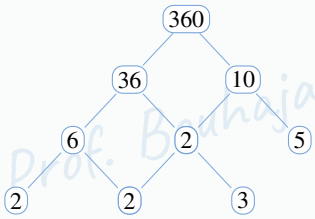
Écriture canonique

On divise successivement par les plus petits nombres premiers possibles. On regroupe les facteurs identiques sous forme de puissances :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad p_1 < p_2 < \cdots < p_k.$$

Exemple : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. La décomposition est unique.

Schéma de factorisation de 360



Donc $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

Diviseurs et nombre de diviseurs

Si $n = p^a q^b r^c$, tout diviseur positif s'écrit $p^i q^j r^k$ avec $0 \leq i \leq a$, $0 \leq j \leq b$, $0 \leq k \leq c$. Le nombre de diviseurs est $(a+1)(b+1)(c+1)$. Ainsi 360 a $(3+1)(2+1)(1+1) = 24$ diviseurs positifs.

Applications 05

1. Décomposer 216 en facteurs premiers, puis compter ses diviseurs. 2. Simplifier $\frac{84}{60}$ à l'aide des décompositions. 3. Simplifier $\sqrt{2100}$ en extrayant les carrés parfaits.

6. Nombres premiers entre eux

Utiliser le PGCD pour vérifier que deux entiers n'ont aucun diviseur commun autre que 1.

Définition et application

Deux entiers naturels non nuls a, b sont **premiers entre eux** si $\text{PGCD}(a, b) = 1$. Exemple : 17 et 42 sont premiers entre eux.

$84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$; leur facteur commun maximal est 12. Donc $\text{PGCD}(84, 60) = 12$ et $\frac{84}{60} = \frac{7}{5}$, fraction irréductible.

À faire en classe 06

Décomposer 540 et 756 en facteurs premiers. En déduire leur PGCD et dire si ces deux nombres sont premiers entre eux.

PGCD : le plus grand diviseur commun

7. Calculer un PGCD

Choisir la méthode de calcul adaptée : listes, décomposition ou algorithme d'Euclide.

Le PGCD est le plus grand entier naturel qui divise à la fois a et b.

Méthode par facteurs premiers

Si $a = 2^4 \times 3^2 \times 5$ et $b = 2^2 \times 3 \times 7$, alors

$$\text{PGCD}(a,b) = 2^{\min(4,2)}3^{\min(2,1)} = 2^2 \times 3 = 12.$$

On prend uniquement les facteurs communs avec leur plus petit exposant.

Algorithme d'Euclide

Si $a = bq + r$, alors $\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(b,r)$. Répéter jusqu'au reste nul : le dernier reste non nul est le PGCD.
Exemple : $385 = 140 \times 2 + 105$; $140 = 105 \times 1 + 35$; $105 = 35 \times 3 + 0$. Donc $\text{PGCD}(385, 140) = 35$.

Choisir la méthode

Les décompositions sont pratiques si les facteurs sont faciles à obtenir. L'algorithme d'Euclide est efficace pour de grands nombres. Une liste de diviseurs convient surtout aux petits entiers.

À faire en classe 07

1. Calculer $\text{PGCD}(2414, 804)$ avec Euclide. 2. Calculer $\text{PGCD}(360, 216)$ par décomposition. 3. Vérifier $\text{PGCD}(42, 18)$ par la liste des diviseurs.

8. Propriétés du PGCD

Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$:

Règles à retenir

$\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(b,a)$; $\text{PGCD}(a,1) = 1$; $\text{PGCD}(a,a) = a$. Si $b \mid a$, alors $\text{PGCD}(a,b) = b$.
Si $a = bq + r$, alors $\text{PGCD}(a,b) = \text{PGCD}(b,r)$.

À faire en classe 08

Montrer avec l'algorithme d'Euclide que 144 et 385 sont premiers entre eux.

PPCM : le plus petit multiple commun

Déterminer les multiples communs et résoudre des problèmes de périodicité.

9. Calculer un PPCM

Le PPCM de $a, b \in \mathbb{N}^*$ est le plus petit multiple strictement positif commun.

Méthode par facteurs premiers

Pour $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$ et $b = 2^2 \times 3 \times 7$:

$$\text{PPCM}(a,b) = 2^{\max(3,2)} 3^{\max(2,1)} \times 5 \times 7 = 2520.$$

On prend tous les facteurs présents avec leur plus grand exposant.

Lien entre PGCD et PPCM

Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{PGCD}(a,b) \times \text{PPCM}(a,b) = a \times b.$$

Donc $\text{PPCM}(a,b) = \dfrac{ab}{\text{PGCD}(a,b)}$. Si a, b sont premiers entre eux, leur PPCM vaut ab.

Application guidée / calculer les deux

$36 = 2^2 \times 3^2$ et $24 = 2^3 \times 3$. Donc $\text{PGCD}(36,24) = 12$ et $\text{PPCM}(36,24) = 72$. Vérification : $12 \times 72 = 36 \times 24 = 864$.

À faire en classe 09

1. Calculer le PGCD et le PPCM de 1500 et 840. 2. Deux alarmes sonnent toutes les 18 min et 24 min ; elles sonnent ensemble à 9 h. Après combien de minutes sonneront-elles de nouveau ensemble ?

10. Méthode de synthèse

Avant de calculer, repérer la question posée.

Choisir le bon outil

Divisibilité : critère ou écriture $a = dk$. **PGCD :** plus grand diviseur commun, simplification, partage maximal. **PPCM :** plus petit multiple commun, synchronisation. **Premier :** tester les premiers jusqu'à $\sqrt{n}$.
Vérifier : $0 \le r < b$; PGCD $\times$ PPCM $= ab$; exposants minimaux pour le PGCD, maximaux pour le PPCM.

À faire en classe 10

Répartir 84 stylos rouges et 60 stylos bleus en un nombre maximal de lots identiques sans reste. Combien de lots et combien de stylos de chaque couleur par lot ? Justifier l'opération.