Arithmétique dans $\mathbb{N}$

Tronc commun scientifique • Les définitions et méthodes indispensables

1. Divisibilité et parité

$d \mid a$ signifie $a = dk$ pour un $k \in \mathbb{N}$. d est un diviseur de a.
Pair : $n = 2k$. Impair : $n = 2k + 1$.
Pair $\pm$ pair = pair ; impair $\pm$ impair = pair ; pair $\pm$ impair = impair. Pair $\times$ entier = pair ; impair $\times$ impair = impair.

2. Critères de divisibilité

2 : unité paire. **3 / 9 :** somme des chiffres multiple de 3 / 9.
4 : deux derniers chiffres multiples de 4. **8 :** trois derniers chiffres multiples de 8.
5 : unité 0 ou 5. **25 :** fin 00, 25, 50 ou 75.
11 : différence entre les sommes alternées des chiffres multiple de 11.

3. Division euclidienne et nombres premiers

Pour $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$:

$$a = bq + r, \qquad 0 \leq r < b.$$

Le quotient q et le reste r sont uniques ; $r = 0 \iff b \mid a$.
Un entier $p \geq 2$ est premier s'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. 1 n'est pas premier. Pour tester $n > 1$, essayer les nombres premiers $p \leq \sqrt{n}$.

4. Facteurs premiers

Écriture unique : $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, avec les p_i premiers distincts.
Exemple : $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. Si $n = p^a q^b r^c$, son nombre de diviseurs positifs vaut $(a+1)(b+1)(c+1)$; ici 360 en a 24.

5. PGCD

Le PGCD est le plus grand diviseur commun.
Par décomposition : garder les facteurs premiers communs avec les plus petits exposants.
Euclide : si $a = bq + r$, alors $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, r)$.
Répéter ; le dernier reste non nul est le PGCD.
Premiers entre eux $\iff$ PGCD égal à 1.

6. PPCM et lien avec PGCD

Le PPCM est le plus petit multiple positif commun.
Par décomposition : prendre tous les facteurs premiers avec les plus grands exposants.

$$\text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = ab.$$

Donc $\text{PPCM}(a, b) = ab / \text{PGCD}(a, b)$.

Choisir la bonne méthode

Critère pour tester une divisibilité ; **division euclidienne** pour obtenir quotient et reste ; **PGCD** pour un partage maximal ou une fraction irréductible ; **PPCM** pour synchroniser des périodes. Toujours vérifier les restes et le lien PGCD $\times$ PPCM $= ab$.