Arithmétique dans $\mathbb{N}$ / Série progressive

Tronc commun scientifique • 36 exercices • Sans corrigé

Rappel $d \mid a \iff a = dk$ pour un $k \in \mathbb{N}$; division euclidienne : $a = bq + r$, $0 \leq r < b$. Un nombre premier a exactement deux diviseurs positifs.

01 Pair ou impair ?

Pour $n \in \mathbb{N}$, étudier la parité de $n(n+1)$ et de $n^2 + n + 1$. Justifier sans choisir de valeur particulière de n.

02 Règles de parité

Déterminer la parité de la somme et du produit de deux entiers impairs. Puis étudier la différence de deux entiers de même parité.

03 Diviseurs et multiples

1. Écrire les diviseurs positifs de 18 et de 38. 2. Donner cinq multiples positifs de chacun des nombres 3, 5 et 7.

04 Critères de divisibilité

Compléter le tableau : indiquer si 7524, 2805, 9360 et 91328 sont divisibles par 2, 3, 4, 5, 8, 9 et 25. Justifier avec le critère correspondant.

05 Trouver des entiers

Déterminer tous les entiers naturels compris entre 202 et 299 qui sont divisibles à la fois par 3 et par 5.

06 Parité d'expressions

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudier la parité de $A = 3n^2 + n$ et de $B = n^2 + n + 1$. Factoriser ou raisonner selon la parité de n.

07 Chercher un chiffre

Déterminer le chiffre a pour que le nombre $3a48$ soit divisible par 9. Vérifier ensuite sa divisibilité par 3 et par 4.

08 Raisonner avec des chiffres

Déterminer les chiffres a, b, c tels que $23a4$ soit divisible par 3 mais pas par 9, puis tels que $23b5c$ soit divisible par 3 et par 5.

09 Division euclidienne

Déterminer le quotient et le reste de la division de 658 par 13, puis de 12357 par 113. Vérifier $0 \leq r < b$ dans chaque cas.

10 Reste et divisibilité

1. Quels sont les restes possibles d'une division par 7 ? 2. Montrer que $5^{n+2} - 5^n$ est divisible par 24 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11 Entier premier ?

Étudier la primalité de 53, 97, 217 et 299. Pour chaque nombre composé, donner un diviseur premier ; pour chaque premier, justifier le test jusqu'à sa racine carrée.

12 Décomposition en facteurs premiers

Décomposer 216, 360 et 756 en facteurs premiers. Écrire les facteurs dans l'ordre croissant.

13 Critères 11 et 25

Tester la divisibilité de 50611 par 11, puis de 12475 par 25. Pour le premier nombre, utiliser les sommes alternées ; pour le second, observer les deux derniers chiffres.

14 Nombres premiers entre 20 et 40

Déterminer tous les nombres premiers p tels que $20 < p < 40$. Pour chaque entier candidat, expliquer quels diviseurs premiers il faut tester.

Rappel Pour tester $n > 1$ premier, essayer les premiers $p \leq \sqrt{n}$. Pour le PGCD par décomposition, garder les facteurs communs avec les exposants minimaux.

15 Compter les diviseurs

À l'aide de la décomposition de 360, calculer le nombre de ses diviseurs positifs. Donner ensuite tous ses diviseurs impairs.

16 Simplifier exactement

1. Simplifier la fraction $\frac{84}{60}$. 2. Simplifier $\sqrt{2100}$ en extrayant les carrés parfaits de son radicand.

17 PGCD par décomposition

Calculer $\text{PGCD}(360, 216)$ puis $\text{PGCD}(540, 756)$ en utilisant les décompositions en facteurs premiers.

18 Algorithme d'Euclide

Calculer $\text{PGCD}(385, 140)$ en écrivant toutes les divisions euclidiennes successives. Conclure au dernier reste non nul.

19 Divisions successives

Calculer $\text{PGCD}(15648, 657)$ avec l'algorithme d'Euclide. Présenter clairement chaque égalité de la forme $a = bq + r$.

20 Réduire une expression PGCD

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\text{PGCD}(5n + 2, 3n + 1) = 1$ en utilisant une combinaison linéaire de ces deux entiers.

21 Premiers entre eux

Montrer que 144 et 385 sont premiers entre eux en déterminant leur PGCD avec Euclide.

22 Deux entiers consécutifs

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{PGCD}(n + 1, n + 2) = 1$. En déduire que leur PPCM est $(n + 1)(n + 2)$.

23 PGCD d'une expression

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\text{PGCD}(n, n + 1) = 1$, puis expliquer pourquoi deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux.

24 Reconnaître un diviseur

Étudier ces affirmations pour $n \geq 2$: $n - 1 \mid n^2 - 1$; $n + 1 \mid n^2 - 1$; $n^2 + 1 \mid n^2 - 1$. Dire lesquelles sont toujours vraies et justifier.

25 PGCD et simplification

Soient $a = 1500$ et $b = 840$. Décomposer a et b, calculer leur PGCD, puis simplifier $\frac{a}{b}$.

26 PGCD par Euclide

Calculer $\text{PGCD}(2024, 748)$ en détaillant les divisions euclidiennes successives, puis vérifier que le dernier reste non nul divise les deux nombres.

Rappel Pour le PPCM, prendre tous les facteurs premiers avec les exposants maximaux. Pour $a, b > 0$, $\text{PGCD}(a,b)\,\text{PPCM}(a,b) = ab$.

27 PPCM par décomposition

Calculer $\text{PPCM}(1500, 840)$ à l'aide des décompositions en facteurs premiers, puis vérifier le résultat avec le PGCD.

28 Synchroniser des périodes

Deux alarmes se déclenchent toutes les 18 min et les 24 min. Elles sonnent ensemble à 9 h. À quelle heure sonneront-elles de nouveau ensemble ?

29 Somme de cinq entiers

Montrer que la somme de cinq entiers naturels consécutifs est divisible par 5.

30 Somme de nombres pairs

Montrer que la somme de trois nombres pairs consécutifs est divisible par 6.

31 Produit de trois consécutifs

Montrer que le produit de trois entiers naturels consécutifs est divisible par 6.

32 Carrés de deux consécutifs

1. Développer $(n+1)^2 - n^2$. 2. En déduire que tout entier impair positif est la différence des carrés de deux entiers naturels consécutifs. 3. Écrire 19, 47 et 53 sous cette forme.

33 Critère de divisibilité par 11

À l'aide des sommes alternées des chiffres, déterminer si 50611 est divisible par 11. Vérifier ensuite en donnant son quotient.

34 Quotient entier naturel

Déterminer tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $\dfrac{n+13}{n+3}$ soit un entier naturel.

35 Équation en nombres naturels

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^2 - y^2 = 51$. Indication : factoriser en $(x-y)(x+y)$.

36 Problème de partage

On dispose de 84 stylos rouges et de 60 stylos bleus. Former le plus grand nombre possible de lots identiques, sans reste. Combien de lots obtient-on et quelle est leur composition ? Justifier.