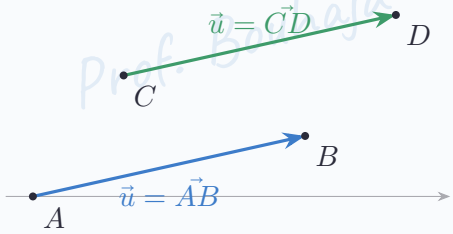
Calcul vectoriel dans le plan

Tronc commun scientifique • Vecteurs, opérations et propriétés géométriques

Lire un vecteur : direction, sens et norme

Un vecteur $\vec{AB}$ est caractérisé par sa **direction**, celle de la droite (AB), son **sens**, de A vers B, et sa **norme** (ou longueur), notée $\|\vec{AB}\| = AB$. Des représentants peuvent avoir des points de départ différents tout en désignant le même vecteur.
Le vecteur nul vérifie $\vec{AA} = \vec{0}$ et $\|\vec{0}\| = 0$; il n'a ni direction ni sens. L'opposé de $\vec{AB}$ est $-\vec{AB} = \vec{BA}$. Un vecteur de norme 1 est un vecteur unitaire.



Deux vecteurs sont égaux exactement quand ils ont même direction, même sens et même norme.

Application guidée / reconnaître les caractéristiques

On a $AB = CD = 3$ cm et les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Si les flèches vont toutes deux vers la droite, alors $\vec{AB} = \vec{CD}$. Si l'une va vers la gauche, alors $\vec{AB} = -\vec{CD}$. La longueur seule ne suffit donc pas à établir l'égalité.

À faire en classe 01

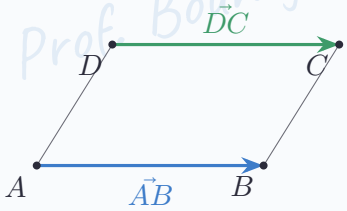
1) Donner direction, sens et norme de $\vec{MN}$.
2) Compléter : $-\vec{AB} = \ldots$; $\vec{PP} = \ldots$; $\|\vec{BA}\| = \ldots$.
3) Peut-on conclure que deux vecteurs sont égaux s'ils ont même norme ? Justifier.

2. Égalité de vecteurs et parallélogramme

Objectif : utiliser une égalité vectorielle pour reconnaître ou construire une figure.

Deux caractérisations à connaître

Pour deux vecteurs non nuls, $\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement s'ils ont même direction, même sens et même norme. Cette égalité équivaut aussi à $ABDC$ parallélogramme (attention à l'ordre des sommets).
Pour quatre points quelconques, $\vec{AB} = \vec{CD} \iff \vec{AC} = \vec{BD}$. Enfin, pour un point A et un vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M tel que $\vec{AM} = \vec{u}$.



Application guidée / justifier un parallélogramme

On suppose $\vec{AB} = \vec{DC}$. Les côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles et de même longueur, avec des sens compatibles dans l'écriture vectorielle. Donc le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
Réciproquement, si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\vec{AB} = \vec{DC}$ et $\vec{AD} = \vec{BC}$.

À faire en classe 02

1) $ABDC$ est un parallélogramme. Écrire deux égalités vectorielles correspondantes.
2) Construire M tel que $\vec{AM} = \vec{BC}$, puis préciser la nature de $ABMC$.
3) On sait que $\vec{AC} = \vec{BD}$. En déduire une autre égalité vectorielle en utilisant la propriété du cours.

3. Somme de vecteurs et relation de Chasles

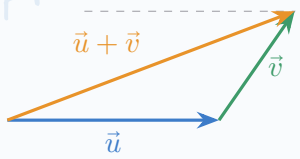
Objectif : réduire une somme ou construire graphiquement un vecteur.

La relation de Chasles

Pour tous points A, B, C du plan :

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}.$$

On peut ainsi **intercaler un point** dans un vecteur : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$. Une somme se construit en plaçant les vecteurs bout à bout ; le vecteur résultant va de l'origine du premier à l'extrémité du dernier.
La règle du parallélogramme donne une autre construction : si $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$, alors $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AD}$, où $ABDC$ est un parallélogramme.



Application guidée / développer puis réduire

Réduire $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$:

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \boxed{\vec{AD}}.$$

Autre exemple : $\vec{AB} + \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{0} + \vec{AC} = \vec{AC}$.

À faire en classe 03

1) Réduire $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$.
2) Réduire $\vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BC}$.
3) Dans un parallélogramme $ABDC$, exprimer $\vec{AD}$ à l'aide de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

4. Multiplier un vecteur par un réel

Objectif : interpréter le signe et simplifier des combinaisons linéaires.

Sens, direction et norme de $k\vec{u}$

Pour un réel k et un vecteur $\vec{u}$: si $k > 0$, $k\vec{u}$ a même direction et même sens que $\vec{u}$; si $k < 0$, il a la même direction et le sens contraire. Dans tous les cas, $\|k\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$. En particulier, $0\vec{u} = \vec{0}$ et $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.
Pour tous réels a, b et vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$:

$$a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}, \quad (a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}, \quad a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}.$$

Application guidée / simplifier les coefficients

$$\begin{aligned} 3(\vec{u}-\vec{v}) - 2(2\vec{u}+\vec{v}) &= 3\vec{u} - 3\vec{v} - 4\vec{u} - 2\vec{v} \\ &= \boxed{-\vec{u} - 5\vec{v}}. \end{aligned}$$

On distribue chaque coefficient, puis on regroupe séparément les termes en $\vec{u}$ et ceux en $\vec{v}$.

À faire en classe 04

1) Simplifier $2(\vec{u}+3\vec{v}) - 3(\vec{u}-\vec{v})$.
2) Si $\|\vec{u}\| = 4$ cm, calculer $\|-2\vec{u}\|$ et indiquer le sens de $-2\vec{u}$.
3) Réduire $\frac{1}{2}(4\vec{a} - 2\vec{b}) + 3(\vec{b}-\vec{a})$.

5. Colinéarité, alignement et parallélisme

Objectif : traduire une direction commune par une relation vectorielle.

Un critère algébrique pour une direction

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur ; deux vecteurs non nuls sont colinéaires exactement quand ils ont la même direction.

- A, B, C sont alignés si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires.

Méthode : exprimer les deux vecteurs avec les mêmes vecteurs de référence, puis chercher un coefficient de proportionnalité.

Application guidée / montrer que deux droites sont parallèles

Dans un triangle ABC, on prend E, F tels que $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ et $\vec{AF} = \frac{2}{3}\vec{AC}$. Alors :

$$\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AF} = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{BC}.$$

Ainsi $\vec{EF}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires ; donc $(EF) \parallel (BC)$.

Attention au vecteur nul

Si l'un des vecteurs est nul, il est colinéaire à l'autre, mais cela ne suffit pas à conclure que deux droites définies par deux points sont parallèles : il faut que chaque droite soit bien définie, avec deux points distincts.

À faire en classe 05

1) $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{v} = -4\vec{i} + 6\vec{j}$. Montrer qu'ils sont colinéaires.
2) Dans un triangle ABC, $\vec{AM} = 3\vec{AB}$ et $\vec{AN} = -\vec{AB}$. Montrer que A, M, N sont alignés.
3) $\vec{PQ} = 2\vec{a} + \vec{b}$ et $\vec{RS} = 6\vec{a} + 3\vec{b}$. Conclure sur les droites (PQ) et (RS).

6. Milieu d'un segment et théorème des milieux

Objectif : reconnaître un milieu grâce aux vecteurs et en déduire un parallélisme.

Caractérisations vectorielles du milieu

Le point I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si :

$$\vec{AI} = \vec{IB} \iff \vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} \iff \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}.$$

Pour tout point M, cette propriété s'écrit aussi :

$$\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}.$$

Dans un triangle ABC, si I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$, alors $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$: le segment des milieux est parallèle au troisième côté et mesure la moitié de sa longueur.

Application guidée / établir la relation des milieux

Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$:

$$\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AC} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \boxed{\frac{1}{2}\vec{BC}}.$$

La dernière égalité vient de Chasles : $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{AC} - \vec{AB}$.

À faire en classe 06

1) I est le milieu de $[AB]$ et $AB = 10$ cm. Donner AI et IB.
2) Pour un point M, on sait que $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$. Que peut-on conclure sur I ?
3) Dans un triangle, I, J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$, avec $BC = 7$ cm. Donner la longueur IJ et le parallélisme obtenu.