Calcul vectoriel dans le plan / Série progressive

34 exercices • Tronc commun scientifique • Sans corrigé

Rappel $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$; $\vec{BA}=-\vec{AB}$; si I est le milieu de $[AB]$, $\vec{AI}=\frac{1}{2}\vec{AB}$. Justifier les constructions et les égalités.

01 Décomposer avec Chasles

Dans le plan, exprimer en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$:

$$\vec{u}=2\vec{AB}-3\vec{CB},\qquad \vec{v}=\frac{1}{5}\vec{AB}-3\vec{CB}.$$

02 Réduire une somme

Simplifier les écritures suivantes :

$$\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD};\qquad \vec{MA}+\vec{AB}+\vec{BC};$$
$$\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}.$$

03 Les milieux d'un quadrilatère

$ABCD$ est un quadrilatère convexe. I, J, K, L sont les milieux respectifs de $[AB], [BC], [CD], [DA]$.

a) Comparer $\vec{IJ}$ et $\vec{LK}$.

b) En déduire la nature de $IJKL$.

04 Construire un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme. Construire M tel que $\vec{AM}=\vec{BC}$.

a) Quelle égalité vectorielle vérifient les côtés opposés de $ABCM$?

b) En déduire la nature de $ABCM$.

05 Égalité de vecteurs

Compléter en justifiant :

a) Dans un parallélogramme $ABCD$, $\vec{AB}=\ldots$ et $\vec{AD}=\ldots$.

b) Si $\vec{AB}=\vec{CD}$, alors $\vec{AC}=\ldots$.

06 Construire une somme

Construire deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ à partir d'un point A. Construire leur somme $\vec{u}+\vec{v}$ avec la règle du parallélogramme, puis refaire la construction en plaçant les vecteurs bout à bout.

07 Construire deux vecteurs égaux

Construire M et N tels que $\vec{AM}=\vec{BC}$ et $\vec{BN}=\vec{AC}$. Comparer $\vec{MN}$ et $\vec{AB}$, puis justifier la réponse avec Chasles.

08 Somme et parallélogramme

A, B, C ne sont pas alignés. Construire D, E tels que $\vec{AD}=\vec{BC}$ et $\vec{AE}+\vec{AD}=\vec{0}$. Déterminer la nature de $EACB$ et justifier.

09 Exprimer avec deux vecteurs

$ABCD$ est un parallélogramme. On pose $\vec{AB}=\vec{i}$ et $\vec{AC}=\vec{j}$.

a) Exprimer $\vec{AD}$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}$.

b) En déduire une expression de $\vec{BD}$.

10 Vecteur nul et égalité

Soient A, B, C, D des points tels que $\vec{AB}=\vec{CD}$.

a) Écrire l'égalité obtenue en ajoutant $\vec{BC}$ aux deux membres.

b) Que signifie $\vec{AB}=\vec{0}$ pour les points A et B ?

11 Développer une somme

Réduire $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DA}$, puis interpréter le résultat à l'aide du point de départ et du point d'arrivée.

12 Construire un opposé

Construire un représentant de $-\vec{BC}$ d'origine A. Nommer son extrémité M, puis écrire une égalité vectorielle reliant $\vec{AM}$ et $\vec{CB}$.

Rappel $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u}+a\vec{v}$; deux vecteurs sont colinéaires si l'un est un multiple réel de l'autre. Pour conclure au parallélisme, vérifier que les droites sont définies.

13 Réduire des combinaisons

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs. Réduire :

$$3(\vec{u}-\vec{v})-2(2\vec{u}+\vec{v}), \qquad \frac{1}{2}(4\vec{u}-2\vec{v})+3(\vec{v}-\vec{u}).$$

14 Regrouper les termes

Simplifier puis factoriser si possible :

$$\vec{U} = 2\vec{a}+3(\vec{b}-\vec{a})-\vec{b}, \qquad \vec{V} = \frac{3}{2}(\vec{u}+\vec{v})-\frac{1}{2}(\vec{u}-3\vec{v}).$$

15 Construire dans un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme. Placer E, F tels que $\vec{AE} = -\frac{1}{2}\vec{AD}$ et $\vec{BF} = \frac{2}{3}\vec{BA}$. Exprimer $\vec{CE}$ et $\vec{CF}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.

16 Trouver une combinaison nulle

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs. Déterminer x et y pour que

$$(x-2)\vec{u}+(y+1)\vec{v} = \vec{0}$$

quel que soit le choix de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

17 Norme d'un vecteur multiplié

On sait que $\|\vec{u}\| = 5$ cm. Calculer les normes de $3\vec{u}$, $-2\vec{u}$ et $\frac{1}{4}\vec{u}$. Préciser le sens des deux derniers par rapport à $\vec{u}$.

18 Différence de deux vecteurs

Réécrire $\vec{u}-\vec{v}$ comme une somme. Simplifier ensuite $2(\vec{u}-\vec{v})+3(\vec{v}-\vec{u})$.

19 Interpréter une combinaison

Dans un triangle ABC, construire D tel que $\vec{AD} = 2\vec{AB}-\vec{AC}$. Exprimer $\vec{BD}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, puis vérifier la construction par Chasles.

20 Tester la colinéarité

On donne $\vec{u} = 2\vec{i}-3\vec{j}$ et $\vec{v} = -4\vec{i}+6\vec{j}$.

a) Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

b) Préciser un coefficient k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

21 Alignement dans un triangle

Dans un triangle ABC, les points E, F vérifient $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ et $\vec{AF} = \frac{2}{3}\vec{AC}$. Exprimer $\vec{EF}$ en fonction de $\vec{BC}$, puis montrer que $(EF) \parallel (BC)$.

22 Comparer deux directions

Dans un triangle ABC, $\vec{AE} = \frac{3}{4}\vec{AB}$ et $\vec{CF} = \frac{1}{4}\vec{AB}$. Exprimer $\vec{BF}$ et $\vec{EC}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, puis étudier la colinéarité de ces vecteurs.

23 Parallélisme dans un quadrilatère

$\vec{MN} = 2\vec{a}-\vec{b}$ et $\vec{PQ} = -6\vec{a}+3\vec{b}$. Montrer que (MN) et (PQ) sont parallèles lorsque les deux droites sont définies.

24 Alignement par coefficients

Dans un triangle ABC, $\vec{AM} = 2\vec{AB}-\vec{AC}$ et $\vec{AN} = 4\vec{AB}-2\vec{AC}$. Montrer que A, M, N sont alignés.

25 Déterminer un coefficient

Deux vecteurs non nuls vérifient $\vec{u} = 3\vec{v}$. Sont-ils de même sens ? Comparer leurs normes et indiquer un critère suffisant pour que les droites qui les portent soient parallèles.

26 Milieu et vecteurs

Dans un triangle ABC, I est le milieu de $[BC]$. Exprimer $\vec{AI}$ à l'aide de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, puis montrer que $\vec{MB}+\vec{MC} = 2\vec{MI}$.

Rappel Si I est le milieu de $[AB]$, alors $\vec{MA}+\vec{MB}=2\vec{MI}$ pour tout point M. Dans un triangle, le segment joignant deux milieux est parallèle au troisième côté.

27 Caractériser un milieu

Pour chacun des cas, déterminer si I est le milieu de $[AB]$ et justifier :

a) $\vec{AI}=\vec{IB}$;

b) $\vec{AI}=\frac{1}{2}\vec{AB}$;

c) $\vec{IA}+\vec{IB}=\vec{0}$.

28 Médianes et centre de gravité

Dans le triangle ABC, A' est le milieu de $[BC]$ et G est le centre de gravité.

a) Rappeler la relation entre $\vec{AG}$ et $\vec{AA'}$.

b) En déduire une relation entre $\vec{GA},\vec{GB},\vec{GC}$.

29 Théorème des milieux

Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$.

a) Établir $\vec{IJ}=\frac{1}{2}\vec{BC}$.

b) Si $BC=8$ cm, donner IJ et préciser le parallélisme.

30 Calculer une longueur

I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$ dans un triangle ABC. Si $IJ=3{,}5$ cm, calculer BC. Justifier avec une relation vectorielle et la propriété des normes.

31 Milieux et somme vectorielle

Dans le triangle ABC, A',B',C' sont les milieux respectifs de $[BC],[CA],[AB]$. Exprimer chacune des sommes $\vec{AB}+\vec{AC}$, $\vec{BA}+\vec{BC}$ et $\vec{CA}+\vec{CB}$ à l'aide d'un seul vecteur. En déduire $\vec{AA'}+\vec{BB'}+\vec{CC'}$.

32 Reconnaître un milieu par Chasles

Dans un triangle ABC, les points D,E vérifient $\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{AC}$ et $\vec{BE}=\vec{BA}+\vec{BC}$. Montrer que C est le milieu de $[DE]$.

33 Exercice de synthèse

Dans un triangle ABC, on choisit E,F tels que $\vec{AE}=\frac{1}{3}\vec{AB}$ et $\vec{AF}=\frac{1}{3}\vec{AC}$.

a) Exprimer $\vec{EF}$ en fonction de $\vec{BC}$.

b) En déduire le parallélisme et le rapport des longueurs EF/BC.

c) Expliquer quelle propriété serait utile pour construire E et F.

34 Bilan des six notions

Recopier et compléter les critères :

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si … ;

b) A,B,C sont alignés si … ;

c) I est le milieu de $[AB]$ si … .

Donner ensuite un exemple géométrique pour chacun.