Les ensembles de nombres

Cours et méthodes • Définitions, calcul exact et raisonnements

1. Reconnaître les cinq familles

$\mathbb{N}$: naturels — $\{0;1;2;3;...\}$. On adopte la convention $0 \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{Z}$: relatifs — $\{...;-2;-1;0;1;2;...\}$. Les entiers négatifs s'ajoutent aux naturels.

$\mathbb{D}$: décimaux — $\left\{\frac{a}{10^n} : a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$: écriture finie après la virgule.

$\mathbb{Q}$: rationnels — $\left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*\right\}$: quotient de deux entiers, diviseur non nul.

$\mathbb{R}$: réels — Les rationnels et les irrationnels ; par exemple $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et π sont irrationnels.

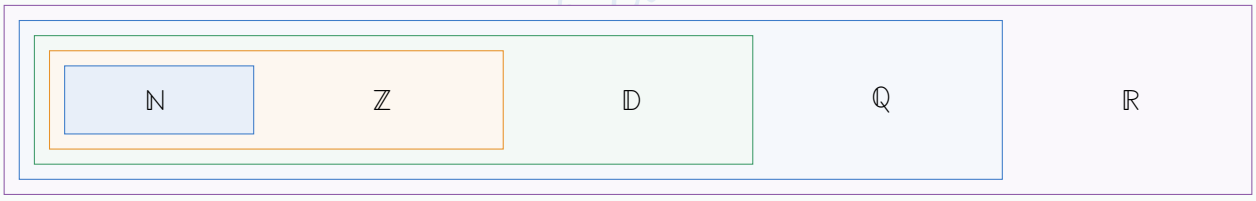
Exemples : $-7 \in \mathbb{Z}$; $0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} \in \mathbb{D}$; $\frac{2}{7} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$.

Une racine n'est pas forcément irrationnelle : $\sqrt{49} = 7 \in \mathbb{N}$. Un irrationnel est un réel qui n'appartient pas à $\mathbb{Q}$.

2. Comprendre les inclusions

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$

Tout entier a est décimal car $a = a/10^0$; tout décimal est rationnel car $a/10^n$ est une fraction de deux entiers. Un nombre appartient aussi à tous les ensembles qui contiennent sa famille.
Les inclusions sont strictes : $-3 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; $0{,}7 \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z}$; $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$; $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.



3. Ne pas confondre les notations

$x \in E$ signifie que le **nombre** x appartient à E ; $A \subseteq B$ signifie que tout élément de l'**ensemble** A appartient à B.
$E^* = E \setminus \{0\}$: éléments non nuls. Ainsi $\mathbb{N}^* = \{1;2;3;...\}$ et $0 \notin \mathbb{R}^*$.
$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$; $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$; $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

$$\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}, \qquad \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}.$$

Attention : zéro est positif et négatif au sens large, mais n'est ni strictement positif ni strictement négatif.

Un même nombre, plusieurs appartenances

$5 \in \mathbb{N}$ implique $5 \in \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. En revanche, $-5 \in \mathbb{Z}$ mais $-5 \notin \mathbb{N}$; $0{,}5 \in \mathbb{D}$ mais $0{,}5 \notin \mathbb{Z}$.
À retenir : « le plus petit ensemble » désigne ici le premier ensemble de la liste $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ qui contient le nombre. Ce n'est pas la liste de toutes ses appartenances.

Classer, écrire et justifier

4. Trouver le plus petit ensemble

1) Simplifier : fraction réduite, signes traités, carrés parfaits calculés. 2) Tester dans l'ordre $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. 3) Justifier le premier ensemble qui convient.

Exemple : $A = \frac{42}{120} = \frac{7}{20} = 0{,}35$. Donc $A \in \mathbb{D}$, mais $0 < A < 1$ implique $A \notin \mathbb{Z}$. Son plus petit ensemble est $\mathbb{D}$; il appartient aussi à $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

Autres exemples : $\frac{\sqrt{81}}{3} = 3 \in \mathbb{N}$; $-\sqrt{25} = -5 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; $\sqrt{(-4)^2} = 4 \in \mathbb{N}$.

5. Une fraction est-elle décimale ?

Écrire la fraction **irréductible** a/b, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b > 0$. Alors

$$\frac{a}{b} \in \mathbb{D} \quad \Longleftrightarrow \quad b = 2^p 5^q \quad (p, q \in \mathbb{N}).$$

Le dénominateur réduit doit donc n'avoir que les facteurs premiers 2 et 5 ; $b = 1$ est autorisé.

$\frac{21}{60} = \frac{7}{20}$ et $20 = 2^2 \times 5$: le nombre est décimal.

$\frac{14}{42} = \frac{1}{3}$: le facteur 3 subsiste, donc le nombre est rationnel non décimal.

Piège : examiner le dénominateur **avant réduction** peut donner une conclusion fausse.

6. Passer d'une écriture périodique à une fraction

Tout rationnel admet une écriture décimale finie ou infinie périodique. La barre indique le motif répété : $0{,}\overline{36} = 0{,}363636\ldots$

Poser $x = 0{,}\overline{36}$. Le motif a deux chiffres ; multiplier par 100 aligne les parties décimales :

$$100x = 36{,}363636\ldots, \qquad 100x - x = 36, \qquad x = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}.$$

Ainsi $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$, tandis que $0{,}36 = \frac{9}{25} \in \mathbb{D}$. Une valeur exacte ne se confond pas avec son arrondi.

7. Union, intersection et différence

Pour deux ensembles A, B et tout réel x :

- $x \in A \cup B \iff x \in A$ **ou** $x \in B$: réunir les éléments, sans répétition.
- $x \in A \cap B \iff x \in A$ **et** $x \in B$: conserver les éléments communs.
- $x \in A \setminus B \iff x \in A$ **et** $x \notin B$: retirer de A les éléments de B.

Avec $A = \{1; 2; 4\}$ et $B = \{2; 3\}$: $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = \{1; 4\}$.

Calcul exact : fractions et racines

8. Fractions : les conditions font partie de la règle

Pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Si de plus $c \neq 0$, $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$.

Méthode : mettre au même dénominateur pour une somme ; multiplier par l'inverse pour une division ; réduire le résultat.

$$\frac{7}{12} - \frac{1}{8} = \frac{14-3}{24} = \frac{11}{24}, \qquad \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) \div \frac{7}{10} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{7} = \frac{1}{7}.$$

On simplifie des **facteurs communs non nuls**, jamais des termes : $\frac{3\times5}{3\times7} = \frac{5}{7}$, mais $\frac{3+5}{3+7} = \frac{4}{5} \neq \frac{5}{7}$.

9. Racines carrées : définition et propriétés

Pour $u \geq 0$, $\sqrt{u}$ est l'unique réel **positif ou nul** dont le carré vaut u.

$$(\sqrt{u})^2 = u, \qquad \sqrt{x^2} = |x| \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Pour $u, v \geq 0$, $\sqrt{uv} = \sqrt{u}\sqrt{v}$. Si de plus $v > 0$, $\sqrt{u/v} = \sqrt{u}/\sqrt{v}$.

Extraire un carré parfait : $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$.

$$2\sqrt{75} - \sqrt{12} = 2 \times 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$$

On additionne les coefficients de termes ayant le **même radical**.

Attention : $\sqrt{9+16} = 5 \neq \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$; $\sqrt{(-4)^2} = 4$, et non -4.

10. Le conjugué pour rationaliser

Le conjugué de $a+b$ est $a-b$; leur produit est $a^2 - b^2$. Multiplier numérateur et dénominateur par un même nombre **non nul** conserve la valeur du quotient.

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \sqrt{3} - 1.$$

Ici $\sqrt{3}+1 \neq 0$ et $\sqrt{3}-1 \neq 0$. Vérifier ces conditions avant le calcul.

Autre exemple : $\dfrac{1}{\sqrt{6}-1} = \dfrac{\sqrt{6}+1}{5}$.

Puissances, identités et démonstration

11. Puissances et écriture scientifique

Pour $a, b \neq 0$ et $m, n \in \mathbb{Z}$:

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^m a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n.$$

On a aussi $(a/b)^n = a^n/b^n$. Exemple : $\frac{5^3 \times 5^{-1}}{5^4} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$.
Tout réel $x \neq 0$ s'écrit $x = \alpha \times 10^n$, avec $1 \leq |\alpha| < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$.
$-0{,}000\,56 = -5{,}6 \times 10^{-4}$; $73\,000 = 7{,}3 \times 10^4$.
Pour additionner, utiliser une puissance commune :

$$6{,}8 \times 10^4 + 3{,}2 \times 10^3 = (68 + 3{,}2) \times 10^3 = 7{,}12 \times 10^4.$$

Signe : $(-3)^2 = 9$, mais $-3^2 = -(3^2) = -9$.

12. Identités remarquables : développer ou factoriser

Pour tous réels a, b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Développer donne une **somme** ; factoriser donne un **produit**.
$(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$; $9x^2 - 16 = (3x-4)(3x+4)$.

13. Une preuve : pourquoi $\sqrt{2}$ est irrationnel

Supposer $\sqrt{2} = p/q$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Alors $p^2 = 2q^2$; p^2 est pair, donc p est pair, car le carré d'un impair est impair.
Écrire $p = 2k$. On obtient $4k^2 = 2q^2$, puis $q^2 = 2k^2$; q est pair aussi. Ainsi p et q sont divisibles par 2, contrairement à l'irréductibilité de p/q. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Raisonnement par l'absurde : supposer le contraire, en déduire une contradiction, puis conclure.

Vérifier un résultat sans calculatrice

Contrôler le signe, les conditions d'existence et l'ordre de grandeur. Pour une identité, tester une valeur peut révéler une erreur, mais ne prouve pas l'égalité pour tous les réels.
Exemple : $2027^2 - 2026 \times 2028 = 2027^2 - (2027-1)(2027+1) = 1$. L'identité $a^2 - (a-1)(a+1) = 1$ évite un calcul de grands nombres.