Ensembles de nombres ★ Méthodes et règles de calcul

Les cinq ensembles de nombres

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; ...\}$: *entiers naturels.*

$\mathbb{Z} = \{...; -2; -1; 0; 1; 2; ...\}$: *entiers relatifs.*

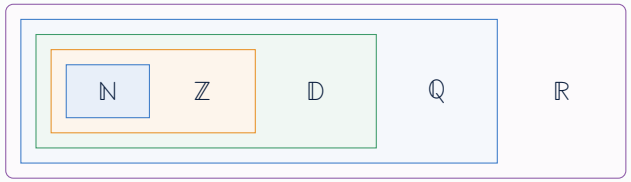
$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} : a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}$: *décimaux (écriture finie).*

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^* \right\}$: *rationnels.*

$\mathbb{R}$: *rationnels et irrationnels ; les irrationnels forment* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exemples : $-6 \in \mathbb{Z}$; $\frac{3}{20} = 0{,}15 \in \mathbb{D}$; $\frac{2}{7} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$; $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Les inclusions / qui contient qui ?



$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

Appartenance, signe et étoile

$x \in E$: *un nombre dans un ensemble ;* $A \subseteq B$: *tout élément de* A *appartient à* B.

$E^* = E \setminus \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$; $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$.

$\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$; $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$: *strictement positifs.*

Piège : 0 *est dans* $\mathbb{N}$ *mais pas dans* $\mathbb{N}^*$.

Méthode / le plus petit ensemble

1) Simplifier : réduire la fraction, calculer les carrés parfaits.

2) Tester dans l'ordre $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

3) Justifier le premier ensemble qui convient.

Exemple : $\frac{18}{24} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z}$. *Le plus petit ensemble est donc* $\mathbb{D}$ *; le nombre appartient aussi à* $\mathbb{Q}$ *et* $\mathbb{R}$.

Fraction décimale et écriture périodique

Réduire d'abord a/b, *avec* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $b > 0$.

$\frac{a}{b} \in \mathbb{D} \iff b = 2^p 5^q \quad (p, q \in \mathbb{N})$.

Exemples : $\frac{21}{60} = \frac{7}{20} \in \mathbb{D}$; $\frac{14}{42} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Un rationnel a une écriture finie ou infinie périodique.

Pour $x = 0{,}\overline{36}$: $100x - x = 36$, *donc* $x = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$.

Fractions / conditions et méthode

Pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, *avec* $b, d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Si $c \neq 0$ *également :* $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Addition : réduire au même dénominateur.

Simplification : supprimer des facteurs communs non nuls, jamais des termes d'une somme.

Exemple : $\frac{5}{12} + \frac{1}{8} = \frac{10+3}{24} = \frac{13}{24}$.

Racines carrées et quantité conjuguée

Pour $u \geq 0$, $\sqrt{u} \geq 0$ *et* $(\sqrt{u})^2 = u$ *; pour* $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

$\sqrt{uv} = \sqrt{u}\sqrt{v}$ *si* $u, v \geq 0$; $\sqrt{u/v} = \sqrt{u}/\sqrt{v}$ *si* $u \geq 0$, $v > 0$.

$\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$; $\sqrt{(-4)^2} = 4$ *et non* -4.

Conjugué : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \sqrt{3} - 1.$$

Attention : $\sqrt{u+v} \neq \sqrt{u} + \sqrt{v}$ *en général.*

Puissances et écriture scientifique

Pour $a, b \neq 0$ *et* $m, n \in \mathbb{Z}$:

$a^m a^n = a^{m+n}$; $a^m / a^n = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$.

$a^0 = 1$; $a^{-n} = 1/a^n$; $(ab)^n = a^n b^n$.

$x = \alpha \times 10^n$, *avec* $1 \leq |\alpha| < 10$ *et* $n \in \mathbb{Z}$ $(x \neq 0)$.

$0{,}000\,56 = 5{,}6 \times 10^{-4}$; $(-2)^2 = 4 \neq -2^2$.

Identités remarquables

Pour tous réels a, b :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Factoriser : produit. ***Développer :*** somme.