Ensembles de nombres / Série progressive

30 exercices • Sans calculatrice sauf indication • Lire la colonne gauche puis la droite

Rappel $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. Simplifier avant de classer ; justifier chaque réponse.

01 Classer après simplification

Donner le plus petit ensemble parmi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ contenant chacun des nombres :

$$0 ;\ -8 ;\ \frac{15}{6} ;\ \frac{11}{9} ;\ \sqrt{49} ;\ -\sqrt{25} ;\ \sqrt{11} ;\ \frac{\sqrt{64}}{4}.$$

Pour les quatre premiers, indiquer aussi tous les ensembles de la liste auxquels ils appartiennent.

02 Les bons symboles

Compléter par $\in$, $\notin$, $\subseteq$ ou $\not\subseteq$:

$$-3 \dots \mathbb{N} \qquad \frac{5}{8} \dots \mathbb{D} \qquad \mathbb{Q} \dots \mathbb{R}$$
$$\mathbb{D} \dots \mathbb{Z} \qquad \sqrt{16} \dots \mathbb{N} \qquad \{1 ; -2\} \dots \mathbb{Z}.$$

Justifier les affirmations qui comparent deux ensembles.

03 Décimal ou non ?

Réduire, puis décider si la fraction est décimale :

$$\frac{9}{40} ;\ \frac{14}{21} ;\ \frac{27}{125} ;\ \frac{21}{28} ;\ \frac{39}{104}.$$

Justifier par le dénominateur réduit. Donner l'écriture décimale lorsqu'elle est finie.

04 Zéro, signe et étoile

Vrai ou faux ? Corriger toute affirmation fausse.

a) $0 \in \mathbb{N}^*$; $-4 \in \mathbb{Z}_-$; $0 \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_-$.
b) $5 \in \mathbb{R}_-^*$; $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}^*$; $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}_+$.
c) $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$; $\mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^* = \{0\}$.

05 Trouver un contre-exemple

Dire si l'affirmation est vraie ; sinon donner un contre-exemple.

a) Tout rationnel est décimal.
b) Tout décimal est rationnel.
c) L'inverse d'un décimal non nul est décimal.
d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

06 Opérations sur les ensembles

$A = \{-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$ et $B = \{0 ; 2 ; 4\}$.

a) Écrire $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ et $B \setminus A$.
b) A-t-on $A \subseteq B$? Justifier.
c) Calculer $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

07 Une écriture périodique

On pose $x = 0{,}\overline{27}$ et $y = 0{,}27$.

a) Écrire $100x$, puis calculer $100x - x$.
b) En déduire une fraction irréductible de x.
c) Classer x et y dans le plus petit ensemble.
d) Calculer exactement $x - y$ et comparer x à y.

08 Des apparences trompeuses

Simplifier, puis classer dans le plus petit ensemble :

$$A = \sqrt{(-6)^2}, \quad B = \frac{\sqrt{81} - 3}{2},$$
$$C = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}, \qquad D = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{8}}{3}.$$

Expliquer pourquoi « contient une racine » ne permet pas de conclure à l'irrationalité.

09 Compléter une famille

Donner un exemple dans chaque ensemble :

$$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} ; \quad \mathbb{D} \setminus \mathbb{Z} ; \quad \mathbb{Q} \setminus \mathbb{D} ; \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Trouver ensuite un réel u tel que $u \notin \mathbb{Q}$, mais $u^2 \in \mathbb{N}$. Justifier.

10 Une fraction à paramètre

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = (k+1)/4$.

a) Montrer que $u_k \in \mathbb{D}$ pour tout k.
b) Trouver un k donnant un naturel et un k donnant un non-entier.
c) Classer u_5. Quels $k \in \{0 ; \dots ; 11\}$ donnent un naturel ?

Rappel Dénominateur non nul ; $\sqrt{x^2} = |x|$; $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Écrire les étapes du calcul.

11 Fractions et classement

Calculer sous forme irréductible, puis classer :

$$A = \frac{5}{6} - \frac{7}{12} + \frac{1}{4},$$
$$B = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right) \div \frac{7}{10},$$
$$C = -\frac{3}{4} \times \frac{8}{9}, \qquad D = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}}{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}}.$$

12 Réduire les racines

Écrire chaque résultat sous la forme $a\sqrt{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ sans facteur carré autre que 1 :

$$A = 2\sqrt{48} - \sqrt{75} + \sqrt{12},$$
$$B = \sqrt{200} - 3\sqrt{8},$$
$$C = 3\sqrt{20} + 2\sqrt{45} - \sqrt{125}.$$

13 Rationaliser

Vérifier que les dénominateurs sont non nuls, puis les rendre rationnels :

$$\frac{1}{\sqrt{7}-2}; \qquad \frac{3}{\sqrt{5}+1}; \qquad \frac{2}{\sqrt{3}+1}.$$

Contrôler le dernier résultat en le multipliant par $\sqrt{3}+1$.

14 Puissances et signes

Écrire comme une seule puissance :

$$A = \frac{(3^4 \times 3^{-2})^2}{3^3}, \qquad B = \frac{(2^{-2})^3 \times 2^5}{2^{-3}}.$$

Calculer $(-2)^4$, -2^4, $(-2)^3$ et $(-2)^{-2}$. Expliquer le rôle des parenthèses.

15 Notation scientifique

Écrire en notation scientifique :
a) $0{,}000\,072$; $-58\,300\,000$.
b) $4{,}8 \times 10^5 + 7{,}2 \times 10^4$.
c) $(3 \times 10^{-4})(8 \times 10^7)$.
d) $(6 \times 10^8)/(1{,}5 \times 10^{-2})$.

16 Développer et réduire

Pour $x \in \mathbb{R}$, développer :

$$A = (2x-3)^2, \quad B = (3x+1)(3x-1),$$
$$C = (x+2)^3, \quad D = (2x-1)^3.$$

Contrôler les résultats en prenant $x = 0$, puis $x = 1$. Ces contrôles ne remplacent pas la démonstration.

17 Factoriser complètement

Pour $x \in \mathbb{R}$, factoriser :

$$A = 25x^2 - 9,$$
$$B = 4x^2 + 12x + 9,$$
$$C = (x-2)(3x+1) + 5(x-2),$$
$$D = 8x^3 - 27, \qquad E = x^3 + 8.$$

Vérifier une factorisation en développant.

18 La valeur exacte avant tout

Simplifier, puis donner le plus petit ensemble :

$$A = (\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2),$$
$$B = \frac{\sqrt{18} + \sqrt{8}}{\sqrt{2}},$$
$$C = \frac{0{,}15 + \frac{1}{4}}{\frac{2}{5}}.$$

Éviter toute approximation décimale des racines.

19 Corriger les erreurs

Les égalités suivantes sont fausses. Expliquer l'erreur et donner le bon résultat :

$$\sqrt{9+16} = 7; \quad \sqrt{(-5)^2} = -5; \quad \frac{2+3}{2+7} = \frac{3}{7}.$$

Faire de même avec $2^3 \times 2^4 = 2^{12}$ et $(x+3)^2 = x^2 + 9$.

20 Comparer sans approcher

a) Comparer $\sqrt{50}$ et $5\sqrt{2}$.
b) Comparer $\sqrt{5} + \sqrt{12}$ et $\sqrt{17}$ en étudiant leurs carrés, tous deux positifs.
c) Montrer $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 5\sqrt{2}$.

Rappel Pour démontrer : annoncer les hypothèses, utiliser une propriété valable, puis conclure. Un exemple ne prouve pas une règle générale.

21 Un grand calcul, une identité

Montrer que, pour tout réel t :

$$t^2 - (t-1)(t+1) = 1.$$

En déduire la valeur et le plus petit ensemble de $2027^2 - 2026 \times 2028$.

22 Irrationalité de $\sqrt{3}$

Supposer $\sqrt{3} = p/q$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.
a) Montrer $p^2 = 3q^2$, puis $3 \mid p$.
b) Écrire $p = 3k$ et en déduire $3 \mid q$.
c) Expliquer la contradiction et conclure.
Admis : si 3 divise le carré d'un entier, il divise cet entier.

23 Des rationnels entre eux

Soient $r = a/b$ et $s = c/d$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $bd \neq 0$.
a) Montrer que $r + s$ et rs sont rationnels.
b) Si $s \neq 0$, montrer que $r/s \in \mathbb{Q}$.
c) En déduire que $1/3 + \sqrt{2}$ est irrationnel.

24 Deux conjugués

On pose $a = 2 + \sqrt{3}$ et $b = 2 - \sqrt{3}$.
a) Calculer $a + b$ et ab.
b) En déduire $1/a$ et $1/b$ sans racine au dénominateur.
c) Calculer $a^2 + b^2$, puis $a^3 + b^3$.

25 Une période décalée

Poser $x = 0{,}1\overline{6} = 0{,}16666\ldots$
a) Écrire $10x$ et $100x$, puis calculer $100x - 10x$.
b) En déduire une fraction irréductible de x.
c) Décimal ou rationnel non décimal ? Justifier.

26 Une autre fraction à paramètre

Pour $n \in \mathbb{N}$, poser $v_n = (3n+2)/5$.
a) Montrer que $v_n \in \mathbb{D}$ pour tout n.
b) Parmi $n = 0, 1, 2, 3, 4$, lesquels donnent un entier naturel ?
c) Montrer que $v_{n+5} - v_n = 3$. En déduire deux autres valeurs de n donnant un entier.

27 Somme et produit connus

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x + y = 3$ et $xy = 2$.
a) Calculer $x^2 + y^2$ à partir de $(x+y)^2$.
b) Utiliser $(x+y)^3$ pour calculer $x^3 + y^3$.
c) Calculer $x^4 + y^4$ avec $(x^2+y^2)^2$.

28 Une différence irrationnelle

On sait que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
a) Montrer par l'absurde que $2 + \sqrt{3}$ n'est pas rationnel.
b) Faire de même pour $5\sqrt{3}$.
c) Donner un exemple montrant que le produit de deux irrationnels peut être rationnel.

29 Synthèse : simplifier et classer

Calculer exactement :

$$A = \frac{(\sqrt{5}+1)^2 - (\sqrt{5}-1)^2}{4\sqrt{5}}.$$

Puis $B = (3^{-1} + 6^{-1}) \times 2$. Justifier les dénominateurs et préciser le plus petit ensemble contenant chaque résultat.

30 Prendre du recul

Pour chaque proposition : prouver si elle est vraie, sinon donner un contre-exemple.
a) Si $x \in \mathbb{Z}$, alors $x^2 \in \mathbb{N}$.
b) Si $x^2 \in \mathbb{N}$, alors $x \in \mathbb{Z}$.
c) Si $x \in \mathbb{Q}^*$, alors $1/x \in \mathbb{Q}$.
d) Si $x + y \in \mathbb{Q}$, alors $x, y \in \mathbb{Q}$.