L'ordre dans $\mathbb{R}$

1. Comparer deux réels • Signe d'une différence et lecture sur un axe

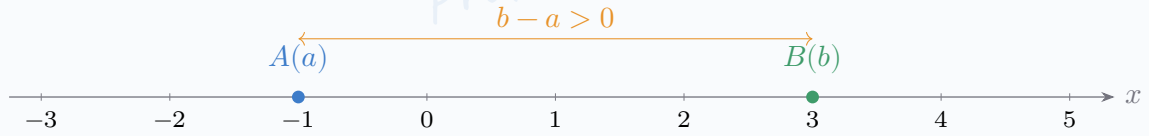
Définitions et méthode

Pour tous réels a, b :

$$a \leq b \iff a - b \leq 0 \iff b - a \geq 0, \qquad a < b \iff a - b < 0.$$

Deux réels vérifient exactement l'un des trois cas : $a < b$, $a = b$, $a > b$. L'ordre est **transitif** : si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.

Méthode : calculer $a - b$, étudier son signe, puis conclure. Pour comparer des fractions, utiliser un dénominateur commun **dont on connaît le signe**.



Sur une droite graduée orientée vers la droite, $a < b$ signifie que le point d'abscisse a est à gauche de celui d'abscisse b.

Application guidée / une comparaison numérique puis littérale

Comparer $\frac{5}{7}$ et $\frac{7}{10}$:

$$\frac{5}{7} - \frac{7}{10} = \frac{50 - 49}{70} = \frac{1}{70} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{5}{7} > \frac{7}{10}.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, poser $A = x^2 + 2x + 4$ et $B = 2x + 3$. Alors $A - B = x^2 + 1 > 0$; ainsi $A > B$ pour tout réel x.

À faire en classe 01

1) Comparer $\frac{5}{6}$ et $\frac{9}{11}$ en étudiant leur différence.
2) Comparer $(x - 1)^2 + 3$ et 3. Pour quelle valeur de x y a-t-il égalité ?
3) Si $a \leq b$ et $b \leq a$, que peut-on conclure ? Justifier.

2. Ordre et opérations

Objectif : transformer une inégalité sans oublier le signe du multiplicateur.

Addition, multiplication et division

Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$:

- $a \leq b \iff a + c \leq b + c$: ajouter ou soustraire un même réel conserve l'ordre.
- Si $c > 0$, $a \leq b \iff ac \leq bc \iff a/c \leq b/c$.
- Si $c < 0$, $a \leq b \iff ac \geq bc \iff a/c \geq b/c$: **le sens change**.
- Si $c = 0$, les deux produits valent 0 ; on perd l'information initiale.

Les mêmes règles valent pour les inégalités strictes lorsque le multiplicateur est non nul.

Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$. On n'obtient pas en général $a - c \leq b - d$: soustraire revient à ajouter l'opposé.

Application guidée / résoudre pas à pas

Résoudre $-3x + 2 \leq 11$ dans $\mathbb{R}$:

$$-3x + 2 \leq 11 \iff -3x \leq 9 \iff x \geq -3.$$

La dernière division se fait par $-3 < 0$: le sens est inversé. L'ensemble solution est $[-3, +\infty[$.

Vérification : $x = 0$ convient, car $2 \leq 11$; $x = -4$ ne convient pas, car $14 > 11$.



Attention au signe inconnu

On ne multiplie pas une inégalité par une expression contenant x sans connaître son signe. Par exemple, passer de $1 \leq 2$ à $x \leq 2x$ n'est valable que pour $x \geq 0$. Pour $x = -1$, cela donnerait $-1 \leq -2$, ce qui est faux.

À faire en classe 02

1) Résoudre $5x - 4 < 11$, puis $7 - 2x \geq 1$.
2) Si $a < b$, comparer $4a + 3$ et $4b + 3$, puis $-2a + 1$ et $-2b + 1$.
3) Expliquer l'erreur : $-2x < 6 \Longrightarrow x < -3$. Donner la bonne conclusion.

3. Carrés, racines, inverses et puissances

Objectif : annoncer les hypothèses avant de comparer.

Les propriétés à utiliser avec leurs conditions

- Si $0 \leq a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$ et $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$. Les réciproques sont vraies sous ces mêmes conditions de positivité.
- Si $a \leq b \leq 0$, alors $a^2 \geq b^2$: l'ordre des carrés est inversé.
- Si a, b sont **non nuls et de même signe**, $a < b \iff 1/a > 1/b$.
- Pour $0 \leq a \leq b$ et un entier $n \geq 1$, $a^n \leq b^n$.

Piège : de $-3 < 2$, on ne peut pas déduire $9 < 4$. Pour comparer deux carrés sans hypothèse de signe, comparer d'abord les valeurs absolues.

Pour $t > 1$: $t < t^2 < t^3$. Pour $0 < t < 1$: $t^3 < t^2 < t$. Pour $t = 0$ ou $t = 1$, les trois valeurs sont égales.

Applications guidées / deux comparaisons

1. Comparer $3\sqrt{2}$ et 4. Les deux nombres sont positifs, donc on peut comparer leurs carrés : $(3\sqrt{2})^2 = 18 > 16 = 4^2$. Ainsi $3\sqrt{2} > 4$.

2. Si $2 \leq x \leq 5$, tous les nombres sont strictement positifs. En passant à l'inverse et en réordonnant les bornes :

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{5} \iff \boxed{\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}}.$$

De même, $-5 \leq y \leq -2$ entraîne $-\frac{1}{2} \leq 1/y \leq -\frac{1}{5}$.

Pourquoi l'inverse renverse-t-il l'ordre ?

Si $a < b$ et $ab > 0$, alors $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0$. La positivité du dénominateur est essentielle. On ne passe pas à l'inverse sur un intervalle contenant 0.

À faire en classe 03

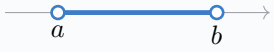
1) Comparer $2\sqrt{5}$ et $\sqrt{21}$ en justifiant les conditions.
2) Si $-4 \leq x \leq -1$, encadrer x^2 et $1/x$.
3) Si $0 < t < 1$, ranger t, t^2 et t^3 dans l'ordre croissant.

4. Intervalles de $\mathbb{R}$

Objectif : passer d'une inégalité à une notation puis à un schéma.

Les quatre intervalles bornés / $a < b$

Un intervalle contient tous les réels situés entre ses bornes, selon que celles-ci sont incluses ou exclues.

Notation	Condition sur x	Représentation
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a, b[$	$a < x < b$	
$[a, b[$	$a \leq x < b$	
$]a, b]$	$a < x \leq b$	

Légende : un point plein signifie « inclus » ; un point vide signifie « exclu ».

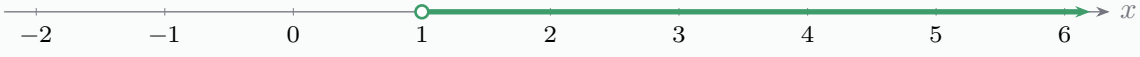
Intervalles non bornés

$[a, +\infty[\iff x \geq a$ $\qquad$ $]a, +\infty[\iff x > a$

$]-\infty, b] \iff x \leq b$ $\qquad$ $]-\infty, b[\iff x < b$

Les symboles $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des réels. **Le crochet est toujours ouvert du côté de l'infini.** On note $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Exemple : $x > 1$ signifie $x \in]1, +\infty[$.



Cas utiles

$[a, a] = \{a\}$ est un singleton ; $]a, a[= \emptyset$ est vide. Ne pas confondre $\emptyset$ avec $\{0\}$, qui contient le nombre zéro.

À faire en classe 04

1) Écrire sous forme d'intervalles : $-2 \leq x < 3$; $x \leq 4$; $x > -1$.
2) Traduire en inégalités : $x \in]-3, 2]$; $x \in [5, +\infty[$.
3) Représenter $[-2, 3[$ et $]-\infty, 1]$ sur deux droites graduées.

5. Intersection et réunion

Objectif : distinguer une condition « et » d'une condition « ou ».

Définitions et lecture

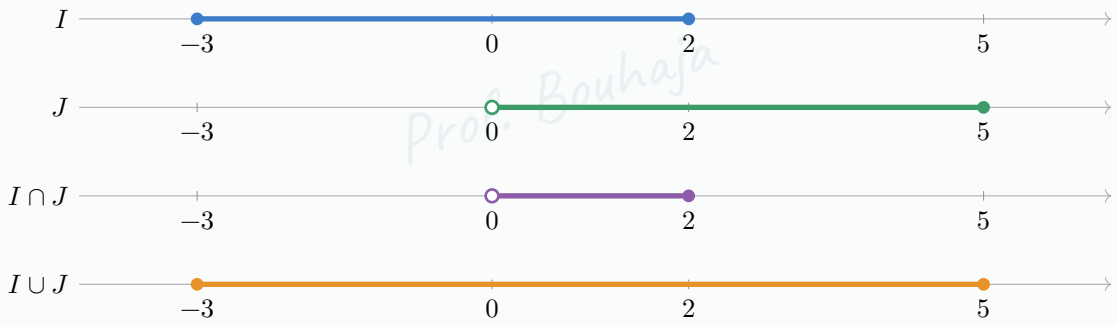
$x \in I \cap J \iff x \in I$ **et** $x \in J$: partie commune.
$x \in I \cup J \iff x \in I$ **ou** $x \in J$: ensemble couvert par au moins un des deux intervalles. Le « ou » est inclusif.
Pour un système de deux inégalités, prendre l'**intersection** des solutions. Pour une alternative, prendre leur **réunion**.

Application guidée / lire les extrémités

Soient $I = [-3, 2]$ et $J =]0, 5]$. Alors

$$I \cap J =]0, 2], \qquad I \cup J = [-3, 5].$$

Zéro est exclu de l'intersection car il n'appartient pas à J. Deux est inclus car il appartient aux deux intervalles.



Les quatre lignes partagent la même graduation ; elles sont décalées verticalement pour la lisibilité.

Deux intervalles ne se raccordent pas toujours

$[-2, 0[\cup]0, 3]$ n'est **pas** $[-2, 3]$: zéro manque. En revanche, $[-2, 0]\cup]0, 3] = [-2, 3]$, car zéro est déjà inclus dans le premier intervalle.

À faire en classe 05

1) Pour $A = [-1, 4[$ et $B = [2, 6]$, déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.
2) Même question avec $C =]-\infty, 1]$ et $D =]1, 3[$.
3) Résoudre le système $x \geq -2$ et $x < 1$, puis l'alternative $x < -2$ ou $x \geq 1$.

6. Encadrer une somme et une différence

Objectif : traiter chaque opération et conserver les bonnes bornes.

Encadrement et amplitude

Encadrer x, c'est trouver a, b tels que $a \leq x \leq b$ (ou une variante avec des inégalités strictes). L'**amplitude** vaut $b-a$.
Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$, alors

$$a+c \leq x+y \leq b+d, \qquad a-d \leq x-y \leq b-c.$$

Pour la différence, commencer par $-d \leq -y \leq -c$, puis additionner. Une multiplication par un réel négatif inverse les bornes.
Exemple : $-2 \leq x \leq 4$, $1 \leq y \leq 3$ donnent $-1 \leq x+y \leq 7$ et $-5 \leq x-y \leq 3$.

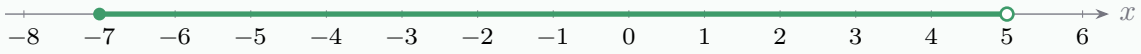
Application guidée / une expression affine

Supposer $-1 < x \leq 3$ et poser $A = -3x+2$. Multiplier par -3 inverse les deux inégalités :

$$-9 \leq -3x < 3 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{-7 \leq A < 5}.$$

L'amplitude de cet encadrement vaut $5-(-7) = 12$. La borne -7 est atteinte pour $x = 3$; la borne 5 est exclue car $x = -1$ est exclu.

$$A \in [-7, 5[$$



Éviter la soustraction membre à membre

De $1 \leq 3$ et $2 \leq 10$, on ne déduit pas $1-2 \leq 3-10$: cela donnerait $-1 \leq -7$, faux. Pour une différence, prendre la borne supérieure du terme soustrait dans la borne inférieure du résultat.

À faire en classe 06

On suppose $-2 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y \leq 3$.
1) Encadrer $3x-1$, puis $-2x+5$, et calculer les amplitudes.
2) Encadrer $2x+y$ et $x-2y$ en détaillant les étapes.
3) Si $2 < x < 5$, encadrer $4-x$ puis ranger $4-x$ et 0 lorsque $x \geq 4$.

7. Encadrer produits, quotients et carrés

Objectif : contrôler les signes et la présence de zéro.

Produits et quotients

Si $0 \leq a \leq x \leq b$ et $0 \leq c \leq y \leq d$, alors $ac \leq xy \leq bd$.
Pour des signes quelconques, si $x \in [a,b]$ et $y \in [c,d]$, calculer les quatre produits :

$$\min(ac, ad, bc, bd) \leq xy \leq \max(ac, ad, bc, bd).$$

Pour encadrer x/y, vérifier que l'intervalle de y ne contient pas 0, encadrer $1/y$, puis traiter le produit $x \times (1/y)$.
Carré : si $a \leq 0 \leq b$, alors $0 \leq x^2 \leq \max(a^2, b^2)$ pour $x \in [a,b]$. On doit tenir compte du changement de signe.

Application guidée / des signes différents

Supposer $x \in [-2,3]$ et $y \in [-4,-1]$. Les produits aux coins sont 8, 2, -12 et -3, donc $-12 \le xy \le 8$.
Puisque $-4 \le y \le -1 < 0$, on a $-1 \le 1/y \le -1/4$. Les quatre produits avec $x \in [-2,3]$ donnent

$$\boxed{-3 \le \frac{x}{y} \le 2}.$$

Enfin $0 \le x^2 \le 9$ et $1 \le y^2 \le 16$.

Une réécriture peut améliorer l'encadrement

Pour $1 \le x \le 3$, encadrer séparément $2x+1$ et $x+2$ donne l'encadrement valide mais large $3/5 \le \frac{2x+1}{x+2} \le 7/3$.
Or $\frac{2x+1}{x+2} = 2 - \frac{3}{x+2}$ et $3 \le x+2 \le 5$. Ainsi $3/5 \le 3/(x+2) \le 1$, d'où l'encadrement plus précis

$$\boxed{1 \le \frac{2x+1}{x+2} \le \frac{7}{5}}.$$

Les deux occurrences de x ne sont pas indépendantes : une réécriture peut réduire la perte de précision.

À faire en classe 07

1) Si $1 \le u \le 2$ et $3 \le v \le 5$, encadrer uv et u/v.
2) Si $-3 \le t \le 2$, encadrer t^2. Justifier la borne inférieure.
3) Si $2 \le x \le 4$, réécrire $\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ et l'encadrer.

8. Valeur absolue et distance

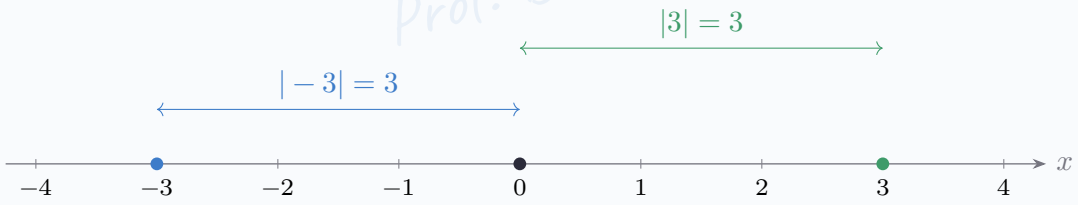
Objectif : interpréter $|x|$ et $|x-a|$ géométriquement.

Définition et propriétés

La valeur absolue de x est la distance de son point à l'origine :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Ainsi $|x| \ge 0$, $|-x| = |x|$, et $|x| = 0 \iff x = 0$. La distance des points d'abscisses a, b vaut $|b-a|$.



Règles de calcul

Pour $u, v \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{u^2} = |u|, \quad |uv| = |u||v|, \quad |u+v| \leq |u| + |v|.$$

Si $v \neq 0$, $|u/v| = |u|/|v|$. On a aussi $\big||u| - |v|\big| \leq |u - v|$.

Attention : $|u+v|$ n'est pas toujours égal à $|u| + |v|$: $|-5+2| = 3$, tandis que $|-5| + |2| = 7$.

Application guidée / enlever une valeur absolue

Simplifier $\sqrt{(x-2)^2}$: on obtient $|x-2|$, puis on étudie le signe de $x - 2$:

$$\sqrt{(x-2)^2} = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2, \\ 2-x & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

La distance de -4 à 3 vaut $|3 - (-4)| = 7$, quel que soit le sens dans lequel on la calcule.

À faire en classe 08

1) Calculer $|-7|$, $|2-5|$, $\sqrt{(-6)^2}$ et $|-3|/|2|$.
2) Écrire $|2x+1|$ sans valeur absolue selon le signe de $2x+1$.
3) Calculer la distance de $-2{,}5$ à $1{,}5$, puis comparer $|-2+5|$ à $|-2| + |5|$.

9. Équations et inéquations avec $|x - a|$

Objectif : traduire une condition de distance en ensemble solution.

À l'intérieur ou à l'extérieur / $r > 0$

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$:

$$\begin{aligned} |x-a| = r &\iff x = a - r \text{ ou } x = a + r, \\ |x-a| \leq r &\iff a - r \leq x \leq a + r, \\ |x-a| < r &\iff a - r < x < a + r, \\ |x-a| \geq r &\iff x \leq a - r \text{ ou } x \geq a + r, \\ |x-a| > r &\iff x < a - r \text{ ou } x > a + r. \end{aligned}$$

Pour $r = 0$, $|x-a| \leq 0 \iff x = a$, tandis que $|x-a| < 0$ n'a aucune solution. Une valeur absolue ne peut jamais être négative.

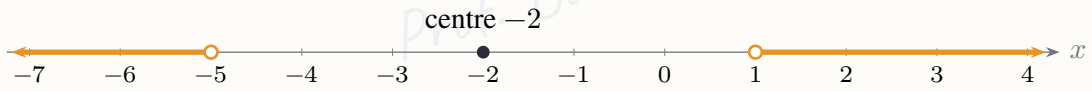
Application guidée / intérieur d'un intervalle

$$|2x-1| \leq 3 \iff -3 \leq 2x - 1 \leq 3 \iff -2 \leq 2x \leq 4 \iff \boxed{-1 \leq x \leq 2}.$$



Application guidée / extérieur d'un intervalle

$|x+2| > 3$ signifie que la distance de x à -2 dépasse 3. Ainsi $x < -5$ ou $x > 1$; l'ensemble solution est $]-\infty,-5[\cup]1,+\infty[$.



À faire en classe 09

Résoudre dans $\mathbb{R}$, donner les solutions sous forme d'intervalle(s) ou de points, puis les représenter :

$$|x-3| \leq 2\,; \qquad |2x+1| > 5\,; \qquad |x-1| = 4.$$

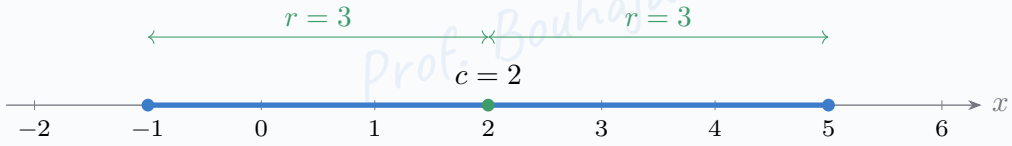
10. Centre, rayon et valeur approchée

Objectif : relier un encadrement à une précision garantie.

Le centre et le rayon d'un segment

Pour $a < b$, le segment $[a,b]$ a pour longueur $b-a$, pour centre $c = (a+b)/2$ et pour rayon $r = (b-a)/2$.

$$x \in [a,b] \iff c - r \leq x \leq c + r \iff |x-c| \leq r.$$



Ici $[-1,5] = [2-3, 2+3]$: sa longueur vaut 6, son rayon vaut 3.

Valeur approchée et erreur absolue

a est une valeur approchée de x à $\varepsilon > 0$ près si $|x-a| \leq \varepsilon$. L'erreur absolue est $|x-a|$.

- **Par défaut :** $a \leq x \leq a+\varepsilon$.
- **Par excès :** $a-\varepsilon \leq x \leq a$.

Si $a \leq x \leq b$, les bornes sont des approximations respectivement par défaut et par excès à $b-a$ près. Le centre $c = (a+b)/2$ approche x à $(b-a)/2$ près ; il n'est **pas nécessairement** une approximation par défaut.

Application guidée / annoncer la bonne précision

De $4{,}72 \leq x \leq 4{,}78$, on déduit

$$c = \frac{4{,}72 + 4{,}78}{2} = 4{,}75, \quad r = \frac{4{,}78 - 4{,}72}{2} = 0{,}03, \quad |x - 4{,}75| \leq 0{,}03.$$

La valeur $4{,}72$ est par défaut à $0{,}06$ près ; $4{,}78$ est par excès à $0{,}06$ près. Le centre divise par deux l'erreur maximale garantie.

À faire en classe 10

1) Donner centre et rayon de $[-3, 7]$, puis le réécrire avec une valeur absolue.
2) Si $1{,}414 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}415$, donner une valeur approchée centrale et sa précision.
3) Si $|x - 2{,}6| \leq 0{,}04$, donner l'encadrement de x et son amplitude.

11. Partie entière et approximations décimales

Objectif : traiter aussi correctement les nombres négatifs.

La partie entière

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier p tel que $p \leq x < p + 1$. On note $p = E(x)$ ou $p = \lfloor x \rfloor$.
Exemples : $E(3{,}7) = 3$; $E(5) = 5$; $E(-2{,}7) = -3$, car $-3 \leq -2{,}7 < -2$.

Attention : pour un réel négatif non entier, enlever les chiffres après la virgule ne donne pas sa partie entière.

Approximations décimales à 10^{-n} près

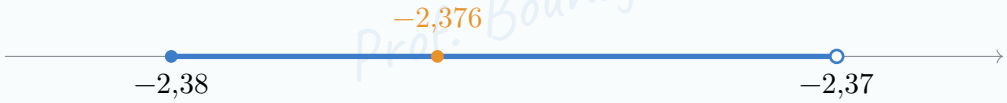
Pour $n \in \mathbb{N}$, poser $p = E(10^n x)$. Alors

$$p \leq 10^n x < p + 1 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\frac{p}{10^n}}_{\text{par défaut}} \leq x < \underbrace{\frac{p+1}{10^n}}_{\text{par excès}}.$$

L'amplitude vaut 10^{-n}. On utilise ici les deux graduations décimales consécutives : si x est exactement la borne inférieure, elle lui est égale et la suivante reste une borne supérieure.
L'**arrondi à n décimales** est une graduation décimale la plus proche. L'erreur est au plus $\frac{1}{2} \times 10^{-n}$. En cas d'équidistance, il faut préciser la convention d'arrondi choisie.

Applications guidées / positif et négatif

Pour $x = 3{,}146$ et $n = 2$, $E(100x) = 314$, donc $3{,}14 \leq x < 3{,}15$. L'arrondi au centième est $3{,}15$; l'erreur vaut $0{,}004 \leq 0{,}005$.
Pour $y = -2{,}376$, $E(100y) = -238$, donc $-2{,}38 \leq y < -2{,}37$. L'arrondi au centième est $-2{,}38$.



Le point est à $0{,}004$ de la borne gauche et à $0{,}006$ de la borne droite.

À faire en classe 11

1) Calculer $E(4{,}2)$, $E(-4{,}2)$, $E(-3)$ et $E(0{,}99)$.
2) Donner les approximations par défaut et par excès à 10^{-2} près de $5{,}728$ et $-1{,}237$.
3) Donner leur arrondi au centième et l'erreur absolue correspondante.