L'ordre dans $\mathbb{R}$

Fiche mémo • Les règles, leurs conditions et les pièges à éviter

Comparer

Pour comparer a et b, étudier le signe de $a-b$:

$$a-b<0 \Rightarrow a<b,$$
$$a-b=0 \Rightarrow a=b,$$
$$a-b>0 \Rightarrow a>b.$$

Pour les fractions, vérifier le signe du dénominateur commun. Si les deux nombres sont positifs, comparer leurs carrés est permis.

Inégalités

Ajouter un même réel conserve l'ordre. Multiplier ou diviser par un nombre positif conserve le sens ; par un nombre négatif, inverse le sens.

$$a \le b,\ c<0 \Rightarrow ac \ge bc.$$

Ne pas multiplier par une expression de signe inconnu.

Puissances

Si $0 \le a \le b$, alors $a^2 \le b^2$ et $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$. Si $a \le b \le 0$, alors $a^2 \ge b^2$. Pour a, b non nuls et de même signe : $a<b \iff 1/a > 1/b$. Pour $t>1$: $t<t^2<t^3$; pour $0<t<1$: $t^3<t^2<t$.

Intervalles

$a \le x \le b$: $[a,b]$ bornes incluses
$a < x < b$: $]a,b[$ bornes exclues
$a \le x < b$: $[a,b[$ $\quad a < x \le b$: $]a,b]$

À $+\infty$ ou $-\infty$, le crochet est toujours ouvert. Un point plein est inclus ; un point vide est exclu.

Ensembles

$I \cap J$ signifie « dans I et dans J » : garder la partie commune. $I \cup J$ signifie « dans I ou dans J » : réunir les parties. Pour résoudre un système, intersecter les solutions ; pour une alternative, les réunir. Vérifier si les extrémités appartiennent à chaque intervalle.

Somme et différence

Si $a \le x \le b$ et $c \le y \le d$:

$$a+c \le x+y \le b+d, \qquad a-d \le x-y \le b-c.$$

Pour soustraire y, encadrer d'abord $-y$: $-d \le -y \le -c$. Amplitude d'un encadrement $m \le x \le M$: $M-m$.

Produits

Pour $x \in [a,b]$ et $y \in [c,d]$, calculer les quatre produits aux bornes :

$$\min(ac,ad,bc,bd) \le xy \le \max(ac,ad,bc,bd).$$

Pour un quotient x/y, vérifier d'abord que $0 \notin [c,d]$, encadrer $1/y$, puis multiplier.

Carré

Si $a \le 0 \le b$, alors

$$0 \le x^2 \le \max(a^2,b^2) \quad (x \in [a,b]).$$

Si $0 \le a \le x \le b$, alors $a^2 \le x^2 \le b^2$. Toujours tenir compte du signe avant d'élever au carré.

Valeur absolue

$$|x-a|=r \iff x=a-r \text{ ou } x=a+r.$$

Pour $r>0$: $|x-a| \le r \iff a-r \le x \le a+r$. $|x-a|<r$ donne l'intervalle ouvert ; $|x-a| \ge r$ donne les deux demi-droites extérieures.

Précision

Si $m \le x \le M$, l'amplitude est $M-m$. Le centre $c=(m+M)/2$ vérifie

$$|x-c| \le \frac{M-m}{2}.$$

Une valeur approchée à ε près signifie $|x-c| \le \varepsilon$. Partie entière : $E(x)=n \iff n \le x < n+1$, y compris pour $x<0$.