Ordre dans $\mathbb{R}$

Série 1 • Comparer et encadrer

Comparer

Sans calculatrice, comparer les nombres en justifiant la méthode.

a) $\frac{7}{9}$ et $\frac{5}{6}$.
b) $\sqrt{13}-3$ et $\sqrt{10}-2$.
c) $\frac{1}{4+\sqrt{15}}$ et $4-\sqrt{15}$.
d) $3-2\sqrt{2}$ et $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}$.

Ordre

On sait que $-3 \leq x \leq 2$ et $1 < y \leq 4$.

a) Encadrer $2x-1$, $x+y$ et $x-y$.
b) Encadrer xy en distinguant les signes possibles de x.
c) Encadrer $\frac{x}{y}$ et préciser si les bornes sont atteintes.
d) Encadrer x^2 et y^2.

Intervalles

Soient $I=]-4;2]$, $J=[-1;5[$ et $K=]3;+\infty[$.

a) Représenter les trois intervalles sur un axe.
b) Déterminer $I\cap J$, $I\cup J$, $J\cap K$ et $I\cap J\cap K$.
c) Écrire $]-\infty;1[$ et $[2;+\infty[$ sous forme d'inégalités.

Distances

a) Écrire $|2x-6|$ sans valeur absolue selon le signe de $2x-6$.
b) Résoudre $|x+1|<3$ et $|2x-4|\geq 2$.
c) Traduire $|x-2|\leq 0{,}5$ par un encadrement.

Encadrer

On suppose $-2 \leq a < 1$ et $2 < b \leq 5$.

a) Encadrer $3a-2b$ et calculer l'amplitude.
b) Encadrer $a+b$, ab et a^2.
c) En déduire un encadrement de a^2+b^2-2a.
d) Expliquer pourquoi soustraire directement les bornes peut donner un encadrement non optimal.

Propriétés

Soient $0<a<b$.

a) Comparer a^2 et b^2, puis $1/a$ et $1/b$.
b) Comparer $a/(a+1)$ et $b/(b+1)$ en étudiant la différence.
c) Comparer $(a+b)/(a^2+b^2)$ à $1/b$.

Valeur absolue

a) Interpréter $|x-3|$ comme une distance à un point de la droite.
b) Résoudre $|x-3|+|x+2|=5$.
c) Résoudre $|x-1|<2$ puis représenter l'ensemble solution.

Synthèse

Un réel x vérifie $-1\leq x\leq 4$. On pose $A=(x-1)^2$.

a) Encadrer $x-1$.
b) Déterminer le minimum et le maximum de A en séparant les signes.
c) Donner l'ensemble exact des valeurs possibles de A.
d) Résoudre $(x-1)^2 \leq 4$ sous la contrainte donnée et représenter la solution.

Justifier

Justifier chaque réponse par une propriété ou un contre-exemple.

a) Si $a<b$, alors $a^2<b^2$.
b) Si $a<b<0$, alors $1/a<1/b$.
c) Pour tout réel x, $|x|\geq x$.
d) Si $a\leq b$, alors $a+c\leq b+c$ pour tout réel c.

Calculer

On sait $-2<x<3$. Encadrer $5-2x$, puis $3x+1$ et leur somme. Comparer l'amplitude obtenue pour la somme à celle qu'on trouve en simplifiant d'abord l'expression.

Comparer

Soient $x\in[0;2]$ et $y\in[-3;-1]$. Comparer $x+y$ à 0, puis encadrer $x-y$ et xy. Indiquer les extrema atteints.

Résoudre

Résoudre $|3x-2|=|x+4|$. Vérifier les solutions obtenues et les placer sur une droite graduée. Résoudre également $|3x-2|\leq|x+4|$ en distinguant les signes.

Encadrer

On sait $-3\leq u\leq 1$.

a) Encadrer u^2 en tenant compte du signe de u.
b) Résoudre $u^2<4$ sous la contrainte donnée.
c) Préciser où u^2 atteint ses extrêmes.

Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis écrire chaque solution comme intervalle et la représenter.

a) $-2x+5\leq 3$.
b) $3(x-1)>2x+4$.
c) $\frac{2x-1}{3}\leq x+2$.
d) Comparer les trois ensembles solutions.

Réunion

On pose $E =]-3;2]$ et $F = [0;5[$.

a) Représenter E et F sur le même axe.
b) Écrire $E \cap F$ et $E \cup F$.
c) Déterminer $E \setminus F$ et $F \setminus E$.
d) Traduire $x \in E \cap F$ par deux inégalités simultanées.

Carrés

Soit $x > 0$. Comparer les nombres suivants et justifier chaque étape : $x+1$ et $\sqrt{x^2+2x+1}$; $x+1$ et $1/x+1$ selon x ; puis $\frac{x}{x+1}$ et $\frac{1}{2}$ selon que $x \leq 1$ ou $x \geq 1$.