Ordre dans $\mathbb{R}$

Série 2 • Appliquer et raisonner

Comparer

Comparer en transformant les expressions ou en étudiant leur différence.

a) $\sqrt{17}-4$ et $\sqrt{10}-3$.
b) $\frac{5}{2+\sqrt{3}}$ et $10-5\sqrt{3}$.
c) $\frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ et $\frac{3}{2}$.
d) $\sqrt{x^2+1}$ et $x+1$ pour $x \geq 0$.

Ordre

On donne $1 \leq x \leq 3$ et $-2 \leq y \leq 1$.

a) Encadrer $2x-3y+1$ puis xy.
b) Encadrer $x/(y+3)$ en étudiant les variations par rapport à x et y.
c) Préciser les bornes atteintes et l'amplitude de chaque intervalle obtenu.

Intervalles

Soient $A=]-\infty;2]$, $B=]-1;4[$ et $C=[3;+\infty[$.

a) Calculer $A \cap B$, $A \cup B$ et $B \cap C$.
b) Décrire $\mathbb{R} \setminus B$ sous forme d'une union d'intervalles.
c) Résoudre $x \in A$ et $x \notin B$.
d) Représenter les réponses sur une droite graduée.

Distances

a) Interpréter $|x-4|$ comme une distance.
b) Résoudre $|x-4| \leq 2$ puis $|x+1|>3$.
c) Déterminer les x tels que $|x-1|+|x-5|=4$.
d) Résoudre $|2x+1| < |x-2|$ en justifiant l'élévation au carré.

Encadrer

Soient $u, v > 0$.

a) À partir de $(\sqrt{u}-\sqrt{v})^2 \geq 0$, établir $u+v \geq 2\sqrt{uv}$.
b) En déduire $t+1/t \geq 2$ pour $t>0$.
c) Montrer que $x/(x+1) < 1$ pour $x>0$.
d) Encadrer $x/(x+1)$ lorsque $2 \leq x \leq 5$.

Propriétés

Soient $0 < a < b$.

a) Comparer a^3 et b^3, puis $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$.
b) Comparer $(a+2)/(a+1)$ et $(b+2)/(b+1)$ par différence.
c) Comparer $(a+b)/2$ et b, puis a/b et 1.
d) Citer pour chaque comparaison la propriété et ses conditions.

Valeur absolue

On donne $-1 \leq x \leq 2$ et $1 \leq y \leq 3$. Poser $M=(x-y)^2$.

a) Encadrer $x-y$.
b) En déduire un encadrement de M en distinguant le signe de $x-y$.
c) Déterminer l'ensemble exact des valeurs de M.
d) Comparer avec l'encadrement obtenu en développant M.

Synthèse

Soient $a, b > 0$ tels que $a+b=6$.

a) Montrer que $ab \leq 9$ à l'aide de $(a-b)^2 \geq 0$.
b) En déduire une majoration de $ab/(a+b)$.
c) Préciser le cas d'égalité.
d) Montrer que $(a^2+b^2)/(a+b) \geq 3$.
e) Déterminer les cas d'égalité dans les résultats établis.

Justifier

On sait $-1 < x < 2$ et $2 < y < 5$. Encadrer $x+y$, $2x-y$ et xy. Pour le produit, séparer les cas suivant le signe de x.

Calculer

Soit $1 \leq t \leq 4$. Poser $F(t)=\frac{2t+1}{t+2}$.

a) Calculer $F(1)$ et $F(4)$.
b) Pour $1 \leq u < v \leq 4$, étudier le signe de $F(v)-F(u)$.
c) En déduire le sens de variation et l'encadrement exact de $F(t)$.

Comparer

Pour $x>0$, montrer successivement $x+\frac{1}{x} \geq 2$, puis $\frac{x}{x+1} \leq \frac{x+1}{x+2}$. Préciser les cas d'égalité. En déduire un encadrement de $\frac{x}{x+1}$ lorsque $1 \leq x \leq 3$.

Résoudre

Résoudre et représenter l'ensemble des réels x vérifiant simultanément $|x-1| \leq 3$ et $x>0$. Écrire la réponse en intervalle, puis sous forme d'inégalités. Déterminer les entiers de cet ensemble et calculer leur somme.

Encadrer

On suppose $-2 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 3$. On pose $P=(x+y)^2$.

a) Déterminer l'intervalle des valeurs de $x+y$.
b) En déduire un encadrement exact de P en distinguant les signes.
c) Comparer avec le résultat obtenu par développement.

Inéquations

On sait $2{,}3 < x < 2{,}5$.

a) Encadrer $3x - 1$ puis $\frac{1}{x}$.

b) En déduire un encadrement de $A = 3x - 1 + \frac{1}{x}$.

c) Calculer l'amplitude de l'encadrement obtenu.

d) Peut-on garantir une valeur approchée de A à $0{,}1$ près ? Justifier.

Réunion

Soit $x \in [-2; 3]$. On pose $B = x^2 - 2x$.

a) Factoriser B sous la forme $(x-1)^2 - 1$.

b) Déterminer exactement le minimum et le maximum de B.

c) Comparer avec l'encadrement terme à terme de $x^2 - 2x$.

d) Expliquer pourquoi la forme factorisée est plus efficace.

Carrés

Soient $0 < a < b$ et $c \leq d < 0$.

a) Comparer $a + c$ et $b + d$: la conclusion est-elle toujours possible ? Donner un contre-exemple si nécessaire.

b) Comparer ac et bc, puis ad et bd.

c) Établir un encadrement de ab lorsque $1 \leq a \leq 2$ et $3 \leq b \leq 5$.

d) Pour chaque opération, indiquer le rôle du signe.